Домашно №1 по Дискр. Структрури за II поток КН, зимен семестър 2012 г.

Тема: комбинаторика

Зад. 1: Тук става дума за стандартни кубични зарчета, всяка страна на които е маркирана с точно едно от ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅. Тези символи наричаме *лицата*. Когато казваме “n различни зара” за някакво n, имаме предвид, че няма два еднакви зара, примерно всеки си има свой цвят. Когато говорим за зарове от един и същи цвят имаме предвид, че тези зарове са неразличими.

а) Колко различни хвърляния има на различни шест зара?

б) Колко различни хвърляния има на шест еднакви зара?

в) Колко различни хвърляния има на шест зара: три бели, червен, зелен и син?

г) Колко различни хвърляния има на три различни зара, такива че сумата от числата е 9?

д) Колко различни хвърляния има на три еднакви зара, такива че сумата от числата е 9?

е) Колко хвърляния има на три сини и три червени зара, такива че всяко от лицата се появява поне веднъж?

Зад. 2: Книжарницата продава четири вида учебници: Дискретни Структури, Анализ, Алгебра и Геометрия. От всеки вид има по 10 екземпляра (очевидно неразличими помежду си). По колко начина може да бъдат подредени всички 40 учебника на един хоризонтален рафт, ако:

а) няма ограничения;

б) учебниците по Алгебра трябва да са един до друг и няма други ограничения;

в) учебниците от всеки вид трябва да са един до друг и няма други ограничения;

г) никой учебник по Дискретни Структури и никой учебник по Алгебра не може да бъде вдясно от позиция номер 20 и няма други ограничения;

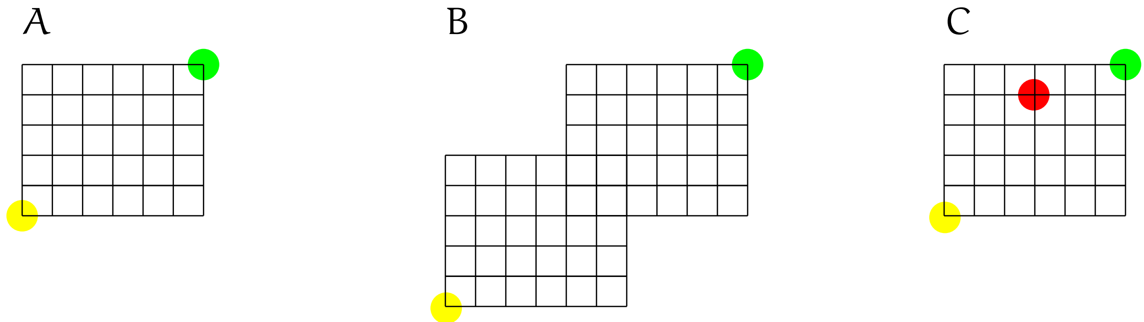
д) учебниците по Алгебра трябва да са вляво от учебниците по Геометрия и няма други ограничения.

Зад. 3: Нека A е множеството от всички булеви вектори с дължина 6. Ще бележим векторите със букви с тилде отгоре, примерно $\widetilde{x}$. Елементите на векторите се записват с индексирани букви без тилде отгоре, примерно x_1, y_2 и т. н. За всеки два вектора $x, y \in A$ казваме, че x *е ротация на* y тогава и само тогава, когато

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{y} = \widetilde{x} \vee \\
&\widetilde{y} = x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1 \vee \\
&\widetilde{y} = x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2 \vee \\
&\widetilde{y} = x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3 \vee \\
&\widetilde{y} = x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4 \vee \\
&\widetilde{y} = x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5
\end{aligned}
$$

където $\widetilde{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$. Колко най-много вектора от A можете да посочите, никои два от които не са ротация един на друг? Обяснете защо това подмножество не е уникално определено, но всички такива множества имат една и съща мощност.

Зад. 4: Дадени са три улични мрежи (улици под прав ъгъл) A, B и C, показани долу. Във всяка от тях стартирате в долния ляв ъгъл (с жълто кръгче около него) и трябва да пристигнете в горния десен ъгъл (със зелено кръгче около него), като е допустимо да се придвижвате само надясно или нагоре. A е досущ като мрежата, разгледана в час, само че с конкретни размери – правилата за придвижване са същите. B има по-сложна форма, но правилата за придвижване са същите, само нагоре или надясно. C има правоъгълна форма, но има едно забранено кръстовище – това с червения кръг около него. За всяка от мрежите определете по колко различни начина можете да се придвижите в мрежата от жълтото до зеленото кръгче, като в B не излизате извън мрежата, а в C не минавате през забраненото кръстовище.



Зад. 5: Докажете по индукция, че броят на булевите вектори с дължина n, в които не се срещат две съседни единици, е F_{n+2}. Припомнете си, че F_n е n-тото число на Фибоначи, а числата на Фибоначи се дефинират така:

$$
\begin{aligned}
&F_0 = 0 \\
&F_1 = 1 \\
&F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ ако } n > 1
\end{aligned}
$$

Зад. 6: Докажете тъждеството

$$\binom{n-1}{m} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{n}{k}, \quad n > 0, k > 0, n \geq k$$

За пълен брой точки е достатъчно да направите полу-формална аргументация чрез развиване на сумата, а също така може да разгледате само случая, в който m е нечетно. Можете да ползвате наготово комбинаторни тъждества, доказвани в час, а също така и факта, че биномен коефициент с отрицателен долен индекс е нула.

Упътване: Развийте сумата от дясната страна, започвайки от $k = m$ в посока $k = 0$. Ако вземете предвид и как се мени знакът, ясно се вижда едно естествено групиране на събираемите две по две в разлики, като евентуално в края може да остане едно събираемо извън група, в зависимост от четността на m. Ако предпочитате, разгледайте само случая, в който m е нечетно. Тогава всички събираеми са групирани две по две в разлики. Използвайки изучавано в час тъждество върху биномни коефициенти, изразете всяка от тези разлики чрез разлики на биномни коефициенти, чиито горни индекси са с единица по-малки.