Теоремата на Sperner и доказателството ѝ

Минко Марков

18 ноември 2012 г.

Нека S е произволно множество и нека $n = |S|$.

Определение 1. Фамилия на Шпернер над S *е множество от подмножества на* S*, нито едно от които не съдържа друго.* □

Теорема 1 (Sperner)**.** *Всяка Шпернерова фамилия над* S *има най-много* $\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ *елемента.*

Доказателство: За целите на това доказателство, да дефинираме, че *верига с дължина* $p - 1$ е всяка редица $X_1, X_2, \ldots, X_p$ от подмножества на S, такива че $\forall i_{\,1 \le i \le p-1}\big(X_i \subset X_{i+1} \wedge \neg\exists Y \subseteq S(X_i \subset Y \subset X_{i+1})\big)$. Очевидно $\forall i_{\,1 \le i \le p}(|X_{i+1} \setminus X_i| = 1)$, следователно n е точна горна граница за дължината на коя да е верига. Всяка верига с дължина n е *максимална.* Лесно се показва, че

- има точно $n!$ максимални вериги и
- за прозволно $X \subseteq \mathcal{A}$ има точно $|X|! \cdot (n - |X|)!$ максимални вериги, съдържащи X.

Нека $\mathcal{A}$ е произволна фамилия на Шпернер над S и нека $t = |\mathcal{A}|$. Нека $\mathcal{A} = \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_t\}$ и нека $b_i = |Z_i|$, за $1 \le i \le t$. Ще докажем, че

$$\sum_{i=1}^{t} b_i! \cdot (n - b_i)! \le n! \tag{1}$$

Действително, дясната страна е броят на всички максимални вериги, а лявата е сумата върху всички елементи на $\mathcal{A}$ от броевете на максималните вериги през тях. Лесно се вижда, че за всеки два различни елемента Z_i, Z_j на $\mathcal{A}$, максималните вериги, минаващи през Z_i, и максималните вериги, минаващи през Z_j, имат празно сечение – ако имаха непразно сечение, то единият от Z_i, Z_j щеше да е подмножество на другия. Тогава лявата страна може да бъде най-много $n!$, което е броят на всички максимални вериги. Имаме следните еквивалентности:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{t} b_i! \cdot (n - b_i)! \le n! &\leftrightarrow \\
\sum_{i=1}^{t} \frac{b_i! \cdot (n - b_i)!}{n!} \le 1 &\leftrightarrow \\
\sum_{i=1}^{t} \frac{1}{\frac{n!}{b_i! \cdot (n - b_i)!}} \le 1 &\leftrightarrow \\
\sum_{i=1}^{t} \frac{1}{\binom{n}{b_i}} \le 1 &
\end{aligned} \tag{2}$$

Известно е, че $\forall k : \binom{n}{k} \leq \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$. Тогава

$$\frac{t}{\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}} \leq \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{\binom{n}{b_i}} \tag{3}$$

От (2) и (3) извеждаме, че

$$\frac{t}{\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}} \leq 1 \leftrightarrow t \leq \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \tag{4}$$

$\square$