Решения на домашно №1 по Дискр. Структрури за II поток КН, зимен семестър 2012 г.

Зад. 1: Тук става дума за стандартни кубични зарчета, всяка страна на които е маркирана с точно едно от ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅. Тези символи наричаме *лицата*. Когато казваме "n различни зара" за някакво n, имаме предвид, че няма два еднакви зара, примерно всеки си има свой цвят. Когато говорим за зарове от един и същи цвят имаме предвид, че тези зарове са неразличими.

а) Колко различни хвърляния има на различни шест зара?

б) Колко различни хвърляния има на шест еднакви зара?

в) Колко различни хвърляния има на шест зара: три бели, червен, зелен и син?

г) Колко различни хвърляния има на три различни зара, такива че сумата от числата е 9?

д) Колко различни хвърляния има на три еднакви зара, такива че сумата от числата е 9?

е) Колко хвърляния има на три бели и три черни зара, такива че всяко от лицата се появява поне веднъж?

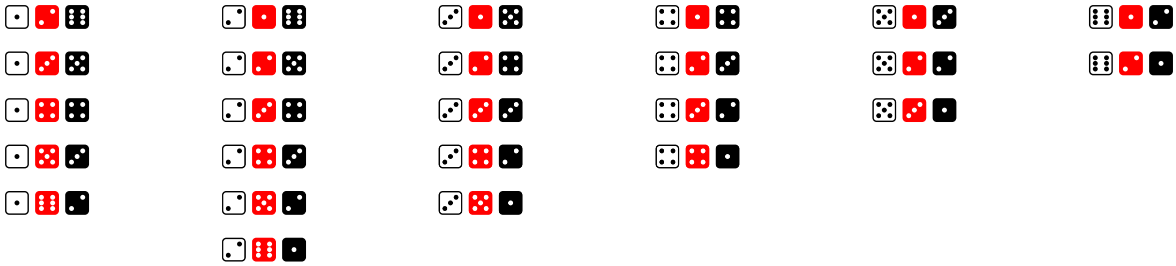
Решение:

а) Става дума за конфигурации с наредба и повтаряне с големина 6 над опорно множество {⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅}. Конфигурациите са с наредбата поради това, че заровете са различни. Отговорът е $6^6 = 46\,656$.

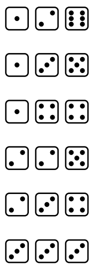
б) Става дума за конфигурации с без наредба, но с повтаряне, с големина 6, над опорно множество {⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅}. Отговорът е $\binom{6+6-1}{6-1} = 462$.

в) Да си представим, че хвърляме независимо първо белите зарове, което можем да направим по $\binom{3+6-1}{6-1}$ начина и после цветните зарове, за което възможностите са 6^3. Множеството, чиято мощност търсим, е декартовото произведение $K_{П}(3,6) \times K_{Н,П}(3,6)$. Отговорът е $\binom{3+6-1}{6-1} \cdot 6^3 = 12\,096$.

г) Отговорът може да се получи като в задачата "Колко целочислени решения има уравнението $x_1 + x_2 + x_3 = 9$, ако $1 \leq x_i \leq 6$?", която на свой ред има същия отговор като задачата "Колко целочислени решения има уравнението $x_1 + x_2 + x_3 = 6$, ако $0 \leq x_i \leq 5$?" Отговорът 25 може да се получи чрез $\binom{6+3-1}{3-1} - 3 \cdot 1 = 25$, но това е прилагане на принципа на включване и изключване. Тъй като множеството от решенията не е голямо, можем да конструираме явно, без да ползваме принципа на включване и изключване. Нека зарчетата са бяло, червено и черно.



д) Множеството от решенията има шест елемента. Нека зарчетата са бели.



е) При шест зара и шест лица, всяко лице да се появява поне веднъж е същото като всяко лице да се появява точно веднъж. Задачата е същата като задачата, по колко начина можем да оцветим шест различни обекта така, че три да получат бял цвят и три, черен цвят. Достатътчно е да определим кои са, примерно, белите обекти, останалите трябва да са черните. Можем да подберем 3 обекта от общо 6 по $\binom{6}{3}$ начина, което е и отговорът..

$\square$

Зад. 2: Книжарницата продава четири вида учебници: Дискретни Структури, Анализ, Алгебра и Геометрия. От всеки вид има по 10 екземпляра (очевидно неразличими помежду си). По колко начина може да бъдат подредени всички 40 учебника на един хоризонтален рафт, ако:

а) няма ограничения;

б) учебниците по Алгебра трябва да са един до друг и няма други ограничения;

в) учебниците от всеки вид трябва да са един до друг и няма други ограничения;

г) никой учебник по Дискретни Структури и никой учебник по Алгебра не може да бъде вдясно от позиция номер 20 и няма други ограничения;

д) учебниците по Алгебра трябва да са вляво от учебниците по Геометрия и няма други ограничения.

Решение:

а) Става дума за пермутации с повторение. Отговорът е мултиномният коефициент

$$\frac{40!}{10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 10!} = 4\,705\,360\,871\,073\,570\,227\,520$$

б) Учебниците по Алгебра могат да бъдат подредени един до друг само по един начин. След това гледаме на десетте учебници по алгебра като на един неделим елемент. Този елемент трябва да разположим заедно с 30 други елемента в редица, като тези други са в три групи по десет, във всяка група неразличими един от друг. Отново имаме пермутации с повторение, този път на 31 неща, от които десет са неразличими помежду си и още десет са неразличими помежду си и още десет са неразличими помежду си. Отговорът е:

$$\frac{31!}{10! \cdot 10! \cdot 10!} = 172\,080\,900\,531\,540$$

в) Учебниците от кой да е вид може да се сложат един до друг по един начин. След това може да гледаме на поредицата от дессете учебника от кой да е вид като на неделим елемент. Има 4! начина да сложим тези 4 елемента в редица. Отговорът е

$$4! = 24$$

г) Учебниците по Алгебра и Дискретни структури заемат точно най-левите 20 позиции, така че множеството, чиято мощност търсим, е декартовото произведение от разполаганията на най-левите 20 позиции на учебниците по Алгебра и Дискретни структури и на най-десните 20 позиции на останалите два вида. Всяко от тези множества има мощност $\frac{20!}{10! \cdot 10!}$. Решението е:

$$\frac{20!}{10! \cdot 10!} \times \frac{20!}{10! \cdot 10!} = 34\,134\,779\,536$$

д) В тази подзадача всъщност имаме само три различни вида учебници, които трябва да разглеждаме: Дискретни Структури, Анализ и третият вид, който е обединението от Алгебра и Геометрия. Причината да не разграничаваме в решението си учебниците по Алгебрата от тези по Геометрията е, че щом алгебрите са вляво от геометриите, ако знаем 20-те позиции на обединението им, ние знаем и точно кои от тях (а именно, най-левите 10) се заемат от алгебрите и кои, от геометриите (очевидно, останалите 10). Решението е:

$$\frac{40!}{20! \cdot 10! \cdot 10!} = 25\,467\,973\,278\,667\,920$$

□

Зад. 3: Нека A е множеството от всички булеви вектори с дължина 6. Ще бележим векторите със букви с тилде отгоре, примерно $\widetilde{x}$. Елементите на векторите се записват с индексирани букви без тилде отгоре, примерно x_1, y_2 и т. н. За всеки два вектора

$x, y \in A$ казваме, че x *е ротация на* y тогава и само тогава, когато

$$\widetilde{y} = \widetilde{x} \vee$$
$$\widetilde{y} = x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1 \vee$$
$$\widetilde{y} = x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2 \vee$$
$$\widetilde{y} = x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3 \vee$$
$$\widetilde{y} = x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4 \vee$$
$$\widetilde{y} = x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$$

където $\widetilde{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$. Колко най-много вектора от A можете да посочите, никои два от които не са ротация един на друг? Обяснете защо това подмножество не е уникално определено, но всички такива множества имат една и съща мощност.

Решение: Да мислим за ротацията на булеви вектори като за релация $R \subseteq J_2^6 \times J_2^6$:

$$\forall x \forall y : xRy \leftrightarrow x \text{ е ротация на } y$$

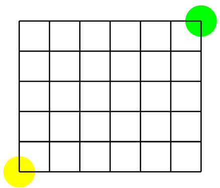
Лесно се вижда, че релацията е релация на еквивалентност. За всеки два вектора x и y, x не е ротация на y тогава и само тогава, когато x и y принадлежат на различни класове на еквивалентност. Максималният брой вектори, за който става дума, е броят на класовете на еквивалентност, а те са 14. Иска се да се посочи по точно един вектор от всеки клас. Решението, показано тук, не е уникално. От всеки клас е посочен лексикографски най-малкият вектор (тоест, ако си мислим за векторите като за числа в двоична система, най-малкото число).

000000
000001
000011
000101
000111
001001
001011
001101
001111
010101
010111
011011
011111
111111

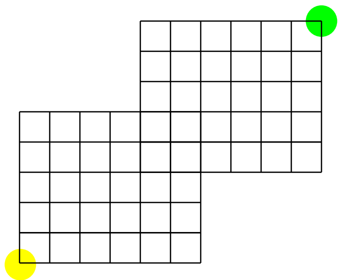
□

Зад. 4: Дадени са три улични мрежи (улици под прав ъгъл) A, B и C, показани долу. Във всяка от тях стартирате в долния ляв ъгъл (с жълто кръгче около него) и трябва да пристигнете в горния десен ъгъл (със зелено кръгче около него), като е допустимо да се придвижвате само надясно или нагоре. А е досущ като мрежата, разгледана в час, само че с конкретни размери – правилата за придвижване са същите. В има по-сложна форма, но правилата за придвижване са същите, само нагоре или надясно. С има правоъгълна форма, но има едно забранено кръстовище – това с червения кръг около него. За всяка от мрежите определете по колко различни начина можете да се придвижите в мрежата от жълтото до зеленото кръгче, като в В не излизате извън мрежата, а в С не минавате през забраненото кръстовище.

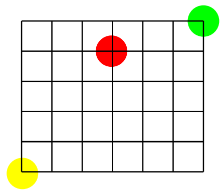
A



B

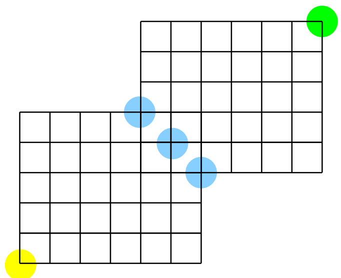


C

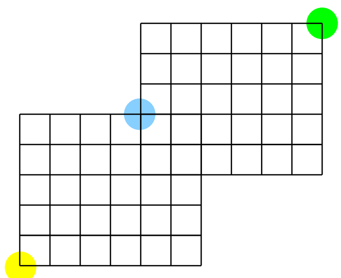


Решение: Както бе казано на лекции, решението за правоъгълна мрежа $m \times n$ е $\binom{m+n}{n}$. Следователно, за A решението е $\binom{6+5}{5} = 462$.

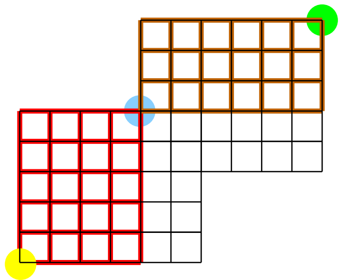
Да разгледаме В. Лесно се вижда, че за да стигнем от жълтата до зелената точка, трябва да минем през поне една от трите сини точки:



Нещо повече: не е възможно да се мине през повече от една от сините точки, следователно се минава през точно една от тях. Иначе казано, множеството от придвижванията между жълтата и зелената точка се разбива на три подмножества съгласно това, през коя синя точка се минава. По принципа на разбиването, отговорът е сумата от мощностите на тези три множества. Да разгледаме произволна синя точка, примерно тази:



Множеството от придвижванията, минаващи през нея, е декартовото произведение от придвижванията в червената подмрежа между жълтата и синята точка, и в кафявата подмрежа между синята и зелената точка:



В червената подмрежа те са $\binom{4+5}{4} = 126$, а в кафявата, $\binom{6+3}{3} = 84$. За тази синя точка имаме $126 \times 84 = 10\,584$ придвижвания. За другите две сини точки напълно аналогично имаме $\binom{5+4}{4} \times \binom{5+4}{4} = 15\,876$ и $\binom{6+3}{3} \times \binom{4+5}{4} = 10\,584$. Отговорът за мрежа B е $10\,584 + 15\,876 + 10\,584 = 37\,044$.

Да разгледаме C. Множеството от придвижванията, неминаващи през червената точка, е разликата между всички придвижвания между жълтата и зелената точки без ограничения (които са, както видяхме, 462) и тези, които минават през червената точка. По начин, напълно аналогичен на извеждането на отговора за B, показваме, че придвижванията, минаващи през червената точка, са $\binom{3+4}{3} \times \binom{3+1}{1} = 140$. Отговорът за C е $462 - 140 = 322$.
$\square$

Зад. 5: Докажете по индукция, че броят на булевите вектори с дължина n, в които не се срещат две съседни единици, е F_{n+2}. Припомнете си, че F_n е n-тото число на Фибоначи, а числата на Фибоначи се дефинират така:

$$
\begin{aligned}
F_0 &= 0 \\
F_1 &= 1 \\
F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ ако } n > 1
\end{aligned}
$$

Решение: Нека A_n е множеството от булевите вектори с дължина n, такива че в тях няма съседни единици. За всеки два булеви вектора x и y да дефинираме операцията $x \oplus y$, която "слепва" x и y, в този порядък, в нов вектор, чиято дължина е сумата от дължините на x и y. Примерно, $0101 \oplus 10110 = 010110110$. Ако x е празният вектор, то $x \oplus y = y$ и аналогичното за y е в сила.

Базата е за $n = 0$. Има точно един булев вектор с нулева дължина (а именно, празният вектор), в който не се срещат две съседни единици. От друга страна, $F_{0+2} = F_2 = 1$. Твърдението е вярно в базовия случай. Да допуснем, че за произволно $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено:

$$
\begin{aligned}
|A_n| &= F_{n+2} \\
|A_{n+1}| &= F_{n+3}
\end{aligned}
$$

Да разгледаме A_{n+2}. Всеки вектор от A_{n+2} очевидно започва или с 0, или с 1. Ако започва с 0, то останалата част е произволен вектор от A_{n+1}. Ако обаче започва с 1, то следващият елемент трябва да е 0—иначе ще имаме две съседни единици—а останалата част е произволен вектор от A_n. Формално, A_{n+2} се разбива на B и C, където:

$$\begin{aligned}B &= \{0 \oplus x \,|\, x \in A_{n+1}\}\\ C &= \{1\,0 \oplus x \,|\, x \in A_n\}\end{aligned}$$

Очевидно $|B| = |A_{n+1}|$ и $|C| = |A_n|$. Съгласно индукционното предположение, $|B| = F_{n+3}$ и $|C| = F_{n+2}$. Съгласно принципа на разбиването, $|A_{n+2}| = |B|+|C|$. Тогава $A_{n+2} = F_{n+2}+F_{n+3}$. Съгласно дефиницията на числата на Фибоначи, $F_{n+2}+F_{n+3} = F_{n+4}$. Следователно, $A_{n+2} = F_{n+4}$. $\square$

Зад. 6: Докажете тъждеството

$$\binom{n-1}{m} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{n}{k}, \quad n > 0, k > 0, n \geq k$$

За пълен брой точки е достатъчно да направите полу-формална аргументация чрез развиване на сумата, а също така може да разгледате само случая, в който m е нечетно. Можете да ползвате наготово комбинаторни тъждества, доказвани в час, а също така и факта, че биномен коефициент с отрицателен долен индекс е нула.
Упътване: Развийте сумата от дясната страна, започвайки от $k = m$ в посока $k = 0$. Ако вземете предвид и как се мени знакът, ясно се вижда едно естествено групиране на събираемите две по две в разлики, като евентуално в края може да остане едно събираемо извън група, в зависимост от четността на m. Ако предпочитате, разгледайте само случая, в който m е нечетно. Тогава всички събираеми са групирани две по две в разлики. Използвайки изучавано в час тъждество върху биномни коефициенти, изразете всяка от тези разлики чрез разлики на биномни коефициенти, чиито горни индекси са с единица по-малки.

Решение: Нека m е нечетно.

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{n}{k} =$$
$$\underbrace{\binom{n}{m} - \binom{n}{m-1}}_{\text{група 1}} + \underbrace{\binom{n}{m-2} - \binom{n}{m-3}}_{\text{група 2}} + \underbrace{\binom{n}{m-4} - \binom{n}{m-5}}_{\text{група 3}} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{1} - \binom{n}{0}}_{\text{група } \frac{m+1}{2}} \qquad (1)$$

Известно е, че

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} \qquad (2)$$

Аналогично,

$$\binom{n}{m-1} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m-2} \qquad (3)$$

Разликата между (2) и (3) е

$$\binom{n}{m} - \binom{n}{m-1} = \binom{n-1}{m} - \binom{n-1}{m-2}$$

Но $\binom{n}{m} - \binom{n}{m-1}$ е група 1 в израз (1). За група 2 имаме аналогично

$$\binom{n}{m-2} - \binom{n}{m-3} = \binom{n-1}{m-2} - \binom{n-1}{m-4}$$

За група 3:

$$\binom{n}{m-4} - \binom{n}{m-5} = \binom{n-1}{m-4} - \binom{n-1}{m-6}$$

И така нататък. За предпоследната група имаме

$$\binom{n}{3} - \binom{n}{2} = \binom{n-1}{3} - \binom{n-1}{1}$$

За последната група $\frac{m+1}{2}$ имаме

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{0} = \binom{n-1}{1} - \binom{n-1}{-1} = \binom{n-1}{1}$$

тъй като знаем, че $\binom{n-1}{-1} = 0$. Ако заместим получената стойност за всяка група в израз (1), получаваме

$$\binom{n-1}{m} - \binom{n-1}{m-2} + \binom{n-1}{m-2} - \binom{n-1}{m-4} + \binom{n-1}{m-4} - \binom{n-1}{m-6} + \ldots + \binom{n-1}{3} - \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{1} = \binom{n-1}{m}$$

тъй като всички събираеми без $\binom{n-1}{m}$ се съкращават. Получихме

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{m}$$

$\square$