Примерни решения на домашно № 1, 15 март 2021 г.

Задача 1: Дадено е множество $A = \{p_1, p_2, \ldots, p_{12}\}$ от съждения.

а) За всяко $i \in \{1, 2, \ldots, 12\}$, съждение p_i е:

> Точно i елемента на A са лъжа.

Кои съждения от A са лъжа и кои са истина? Обосновете отговорите си колкото можете по-добре.

б) За всяко $i \in \{1, 2, \ldots, 12\}$, съждение p_i е:

> Поне i елемента на A са лъжа.

Кои съждения от A са лъжа и кои са истина? Обосновете отговорите си колкото можете по-добре.

Решение: Задачата се решава лесно, ако се мисли в правилната последователност.

а) Съжденията в A са взаимно изключващи се: не може точно k съждения да са лъжа и същевременно точно ℓ съждения да са лъжа, за $k \neq \ell$. Следователно, най-много едно съждение от A е истина. Но тогава за всяко $i \in \{1, 2, \ldots, 10\}$, p_i е лъжа, защото p_i казва "точно i съждения са лъжа", което влече, че останалите $12 - i$ съждения са истина, а това е невъзможно, защото $12 - i > 1$.

Да допуснем, че p_{12} е истина. Но това казва, че точно 12 съждения са лъжа, тоест, че всички 12 съждения са лъжа. Тогава p_{12} е лъжа, в противоречие с направеното по-рано допускане, че p_{12} е истина. Полученото противоречие показва, че p_{12} е лъжа.

Имайки предвид това, да разгледаме p_{11}.

- Да допуснем, че p_{11} е истина. Вече знаем, че p_{12} е лъжа и всяко от $p_1, \ldots, p_{10}$ е лъжа. Заключаваме, че единадесетте съждения, за които p_{11} казва, че са лъжа, са $p_1, \ldots, p_{10}, p_{12}$. Тук противоречие няма.
- От друга страна, допускането, че p_{11} е лъжа води до противоречие. При това допускане, всички дванадесет съждения са лъжа, което веднага влече, че p_{12} е истина.

Отговорът е: p_{11} е истина, а $p_1, \ldots, p_{10}, p_{12}$ са лъжа.

б) И тук p_{12} не може да е истина, защото допускането, че е истина, заедно с факта, че A съдържа точно дванадесет съждения влече, че всички съждения са лъжа, което влече, че и p_{12} е лъжа, което е противоречие.

Тогава p_{12} е лъжа. Показахме, че има поне едно съждение, което е лъжа. Но p_1 казва точно това. Тогава p_1 е истина.

Предвид това, ако допуснем, че p_{11} е истина, единадесетте съждения, за които p_{11} казва, че са лъжа, не могат да включват p_1 и трябва да включват p_{11}, което е противоречие. Тогава p_{11} е лъжа, съща като p_{12}. Вече имаме две съждения, които са лъжа, което означава, че p_2 е истина, също като p_1.

Ако продължим по същия начин, ще заключим, че p_{10} е лъжа, а p_3 е истина. После ще заключим, че p_9 е лъжа, а p_4 е истина. После ще заключим, че p_8 е лъжа, а p_5 е истина. И накрая ще заключим, че p_7 е лъжа, а p_6 е истина.

Отговорът е: $p_1, \ldots, p_6$ са истина, а $p_7, \ldots, p_{12}$ са лъжа.

Задача 2: Докажете чрез еквивалентни преобразувания, че

а) $(p \to q) \land (p \to r) \equiv p \to (q \land r)$.

б) $(p \to r) \land (q \to r) \equiv (p \lor q) \to r$.

Решение: И в двата случая започваме с лявата страна и прилагаме еквивалентни преобразувания, докато получим дясната страна.

а)

$(p \to q) \land (p \to r) \equiv$ // свойство на импликацията
$(\neg p \lor q) \land (\neg p \lor r) \equiv$ // дистрибутивност на дизюнкцията спрямо конюнкцията
$\neg p \lor (q \land r) \equiv$ // свойство на импликацията
$p \to (q \land r)$

б)

$(p \to r) \land (q \to r) \equiv$ // свойство на импликацията
$(\neg p \lor r) \land (\neg q \lor r) \equiv$ // дистрибутивност на дизюнкцията спрямо конюнкцията
$(\neg p \land \neg q) \lor r \equiv$ // закон на De Morgan
$\neg(p \lor q) \lor r \equiv$ // свойство на импликацията
$(p \lor q) \to r$

Задача 3: За произволни $a, b \in \mathbb{R}$, такива че $a < b$, нека

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \land x < b\}.$$

С други думи, за целите на тази задача, (a, b) е отворен интервал, а не наредена двойка. Нека

$$A = \{(-a, a) \mid a \in \mathbb{R} \land a > 0\}.$$

а) Намерете $\bigcap A$.

б) Намерете $\bigcup A$.

Аргументирайте добре отговорите си.

Решение:

а) $\bigcap A$ е сечението на всички интервали от A. Но всеки интервал $(-a, a)$ се разбива на три множества: интервалът $(-a, 0)$, $\{0\}$ и $(0, a)$. Тогава единственото число, което се съдържа във всички интервали, е нулата. За всяко друго реално число b съществува интервал $(-c, c)$ в A, който не съдържа b; примерно, може да вземем $c = \frac{|b|}{2}$.

б) $\bigcup A = \mathbb{R}$. С други думи, всяко реално число се съдържа в обединението на всички интервали от A. Това е тривиално вярно: за всяко реално число b съществува интервал $(-c, c)$ в A, който съдържа b; примерно, може да вземем $c = 2|b|$.

Задача 4: Нека α е константа. Нека $u_0 = 1$ и $u_1 = \cos(\alpha)$. Нека $u_n = 2u_1u_{n-1} - u_{n-2}$ за $n \in \{2, 3, \ldots\}$. Докажете, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ е вярно, че $u_n = \cos(n\alpha)$.

Решение: Нека U е индуктивно дефинираното множество $\{u_0, u_1, u_2, \ldots\}$. Трябва да докажем $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$, където $P(n)$ е предикатът $\boxed{u_n = \cos(n\alpha)}$.

В базата на U има точно два елемента, а именно u_0 и u_1. Затова доказателството трябва да има база, проверяваща верността на предиката върху всеки от тях.

База: $P(0)$ е $\boxed{u_0 = \cos(0\alpha)}$. Но лявата страна, а именно u_0, е 1 по условие, а дясната страна е 1, защото $\cos 0 = 1$. Щом лямата и дясната страна са равни, $P(0)$ е истина. ✓

$P(1)$ е $\boxed{u_1 = \cos(1\alpha)}$. Но лявата страна, а именно u_1, е $\cos\alpha$ по условие, а дясната страна е $\cos\alpha$, защото $\cos 1\alpha = \cos\alpha$. Щом лявата и дясната страна са равни, $P(1)$ е истина. ✓

Индуктивно предположение: Ще използваме силна индукция. Допускаме, че за някое $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ и $P(n+1)$ са верни. А именно, допускаме, че

$$\begin{aligned} u_n &= \cos(n\alpha) \\ u_{n+1} &= \cos((n+1)\alpha) \end{aligned}$$

Индуктивна стъпка: Трябва да докажем, че

$$u_{n+2} = \cos((n+2)\alpha), \tag{1}$$

използвайки индуктивните предположения. Ще ползваме и тъждествата

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \tag{2}$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \tag{3}$$

От (2), замествайки a с α и b с $(n+1)\alpha$, получаваме

$$\cos(\alpha + (n+1)\alpha) = \cos\alpha\cos(n+1)\alpha - \sin\alpha\sin(n+1)\alpha \tag{4}$$

От (3), замествайки a с $(n+1)\alpha$ и b с α, получаваме

$$\cos((n+1)\alpha - \alpha) = \cos(n+1)\alpha\cos\alpha + \sin(n+1)\alpha\sin\alpha \tag{5}$$

Използвайки дефиницията на u_{n+2}, имаме

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 2u_1u_{n+1} - u_n \quad \text{// прилагаме индуктивните предположения и дефиницията на } u_1 \\
&= 2\cos(\alpha)\cos((n+1)\alpha) - \cos(n\alpha) \\
&= \cos(\alpha)\cos((n+1)\alpha) + \cos(\alpha)\cos((n+1)\alpha) - \cos(n\alpha) \qquad \text{// от (4)} \\
&= \cos(\alpha + (n+1)\alpha) + \sin\alpha\sin(n+1)\alpha + \cos(\alpha)\cos((n+1)\alpha) - \cos(n\alpha) \\
&= \cos((n+2)\alpha) + \sin\alpha\sin(n+1)\alpha + \cos(\alpha)\cos((n+1)\alpha) - \cos(n\alpha) \qquad \text{// от (5)} \\
&= \cos((n+2)\alpha) + \sin\alpha\sin(n+1)\alpha + \cos((n+1)\alpha - \alpha) - \sin(n+1)\alpha\sin\alpha - \cos(n\alpha) \\
&= \cos((n+2)\alpha) + \sin\alpha\sin(n+1)\alpha + \cos(n\alpha) - \sin(n+1)\alpha\sin\alpha - \cos(n\alpha) \\
&= \cos((n+2)\alpha)
\end{aligned}$$

Доказахме (1).