Домашно №2 по Дискр. Структрури за II поток КН, зимен семестър 2012 г.

Тема: комбинаторика

Пишете подробни отговори. На всяка подзадача, свързана с броене, пояснете защо смятате, че отговорът Ви е верен.

Зад. 1: Колко двадесетцифрени десетични числа можем да запишем

1 т. **а)** без ограничения ;

1 т. **б)** с деветте цифри 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, така че всяка да се среща поне един път ;

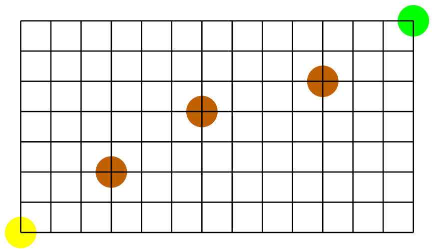
3 т. **в)** с деветте цифри 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, така че всяка да се среща поне един път ;

1 т. **г)** с десетте цифри, така че всяка цифра да се среща точно два пъти.

В запис на число не се допускат водещи нули, освен ако то не е нула.

1 т. **Зад. 2:** Измежду числата $1, 2, \ldots, 10^{10}$, кои са повече: тези, чиито запис (в десетична позиционна бройна система) съдържа цифрата 9, или другите, чиито запис не съдържа 9?

2 т. **Зад. 3:** Разгледайте следната правоъгълна мрежа:



Разгледайте всички придвижвания в нея, в които тръгвате от долния ляв ъгъл, маркиран с жълт кръг, и пристигате в горния десен ъгъл, маркиран със зелен кръг. Разрешени са ходове само нагоре или надясно по мрежата, също както в примера на лекции. Колко от тези придвижвания минават през поне една от трите пресечки, означени с кафяви кръгове?

Зад. 4: В лекционна зала с 10 места, подредени в редица, седят 10 студента. С пристигането си преподавателят изисква студентите да се разместят така, че никой да не седи на мястото, на което седи в момента. По колко начина може да стане това, ако:

1 т.
- всички студенти изпълняват изискването;

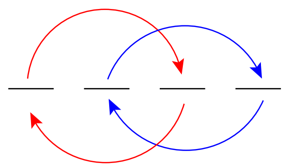
1 т.
- точно три студента отказват да се преместят;

1 т.
- всички студенти изпълняват изискването, но при ограничението, че тези, които са били вляво от средата на редицата, остават вляво от нея и след преместването;

Тази подзадача е бонус. Ако не я решите, не губите нищо. Ако я решите, имате бонус 4 т.

- *всички студенти изпълняват изискването, но при ограничението, че разместването има една или две орбити?*

Пояснение и упътване: *Нека е дадено множество X, чиито елементи са подредени в редица. Нека е дадено разместване (пермутация) на тези елементи. За всяко подмножество $\{x_1, x_2, \ldots, x_t\} \subseteq X$, такова че разместването слага x_1 на мястото на x_2, x_2 на мястото на x_3, и така нататък, x_{t-1} на мястото на x_t, и x_t на мястото на x_1, казваме, че $\{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$ образуват една* орбита. *Очевидно всяка пермутация има една или повече орбити. За да си представите орбитите, мислете за пермутацията като за ориентиран граф с възможни примки: върховете са позициите, а ребро от позиция i към позиция j се слага тогава и само тогава, когато пермутацията е преместила елемента от позиция i на позиция j. Примерно, ако преди пермутацията имаме* $1\,2\,3\,4$, *в този ред, а след нея,* $3\,4\,1\,2$, *въпросният граф изглежда така:*



Тази пермутация има точно две орбити. Графът винаги се състои от един или повече цикъла, като всеки цикъл е една слабо свързана компонента. Тези цикли са орбитите.

Първо съобразете колко пермутации имат само една орбита и колко от тях не оставят нито един елемент на място. След това намерете и докажете рекурентно отношение за броя на пермутациите с точно две орбити. След това съобразете как този резултат участва в отговора на задачата.

Зад. 5: Нека

$$F_n = \begin{cases} 0, & \text{ако } n = 0 \\ 1, & \text{ако } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & \text{ако } n > 1 \end{cases}$$

2 т. Докажете по индукция, че $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N} : F_{3n} = 2k$

И това е бонус, 2 т. *Докажете още по индукция, че* $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N} : F_{5n} = 5k$

4 т. **Зад. 6:** За всяко реално число x и естествено n, нотацията $x^{\underline{n}}$ е кратък запис за:

$$x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) = \prod_{k=0}^{n-1}(x-k)$$

Докажете следния аналог на теоремата на Нютон:

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k}}\, y^{\underline{n-k}} \qquad x, y, n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Наблюдение: Очевидно с тази нотация можем да напишем формулите за броя на вариациите $|K_{\text{H}}(n, m)| = n^{\underline{m}}$ и комбинациите $|K(n, m)| = \frac{n^{\underline{m}}}{m!} = \binom{n}{m}$.
Упътване: Имайки предвид последното наблюдение, преобразувайте израз (1) в еквивалентен израз, лявата страна на който е биномен коефициент, а дясната е сума от произведения на биномни коефициенти. Полученият израз трябва да не съдържа въпросната нотация. Довършете доказателството с комбинаторни разсъждения. Тъй като x и y са естествени числа, доказателство с комбинаторни разсъждения е възможно.