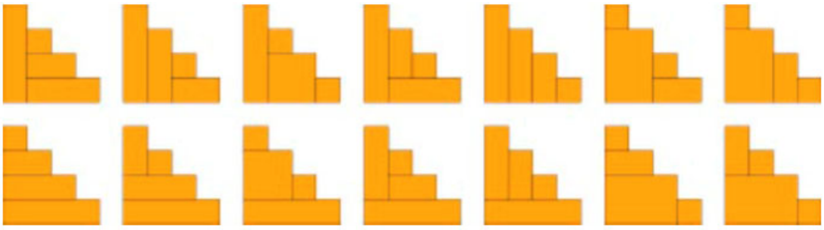
ПЪРВО КОНТРОЛНО ПО ИЗБИРАЕМИЯ УЧЕБЕН ПРЕДМЕТ
“ИЗБРАНИ ГЛАВИ ОТ КОМБИНАТОРИКАТА И ТЕОРИЯТА НА ГРАФИТЕ”
(СУ, ФМИ, 27 МАРТ 2021 Г.)

Задача 1. Пресметнете броя на различните стълби, съставени от n правоъгълника. Горният десен връх на всеки правоъгълник трябва да бъде стъпало на стълбата.



Например при $n = 4$ има 14 различни стълби — показаните на картинката.

Задача 2. Намерете най-високата степен на 7, която дели факториела на 100.

Задача 3. Какъв остатък дава биномният коефициент $\dbinom{47}{23}$ при деление на 7 ?

РЕШЕНИЯ

Задача 1. На всяка стълба с n стъпала съпоставяме по еднозначно определен начин наредено двоично кореново дърво с n листа. Точно един от всички правоъгълници съдържа долния ляв ъгъл на стълбата. Този правоъгълник е коренът на дървото. Той разбива стълбата на две части — лява (горна) и дясна (долна), които също са стълби; на тях съответстват лявото и дясното поддърво.

Получената биекция показва, че стълбите са колкото дърветата, тоест броят им е равен на число на Каталан. До същия извод се стига чрез рекурентно уравнение.

Отговор: $\dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

Задача 2. Най-високата степен на 7, деляща 100!, намираме по формулата на Льожандър:

$$\left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{7^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{7^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{7^4} \right\rfloor + \cdots = 14 + 2 + 0 + 0 + \cdots = 16.$$

Отговор: 16.

Задача 3. Преминаваме в седмѝчна бройна система: $47_{\,(10)} = 65_{\,(7)}$ и $23_{\,(10)} = 32_{\,(7)}$. След това прилагаме теоремата на Люка:

$$\binom{47}{23} \equiv \binom{6}{3}\binom{5}{2} = 20\,.\,10 \equiv 6\,.\,3 = 18 \equiv 4 \pmod 7.$$

Отговор: Остатъкът е 4.