Това са решенията и на двата варианта на контролното.

Задача–бонус По колко различни начина могат да бъдат хвърлени 5 неразличими зара, така че да излязат точно 3 различни числа?

Решение: По $\binom{6}{3} = 20$ начина можем да изберем 3 числа от 6. За всеки от тези 20 начина:

1. или едно число се появява три пъти и двете други числа по един път,
2. или едно число се появява два пъти, друго число също два пъти, и третото число един път.

В първия случай имаме 3 възможности (кое да е числото от трите, появяващо се 3 пъти), а във втория случай също 3 възможности (кое да е числото от трите, появяващо се 1 път). Отговорът е $20 \cdot (3+3) = 120$. $\square$

Задача Колко четирицифрени числа, записани като $abcd$ в десетична позиционна бройна система удовлетворяват $|a-d| = 2$? Водеща нула не се допуска, така че $a \in \{1,2,\ldots,9\}$ и $b,c,d \in \{0,1,\ldots,9\}$.

Решение: Тъй като

$$|a-d| = 2 \leftrightarrow a-d = 2 \oplus a-d = -2$$

има точно 15 възможности за наредената двойка (a,d):

$$(a,d) \in \{(1,3),(2,4),(3,5),(4,6),(5,7),(6,8),(7,9),(9,7),(8,6),(7,5),(6,4),(5,3),(4,2),(3,1),(2,0)\}$$

За останалите две цифри нямаме ограничения, следователно има точно 100 възможности за наредените двойки от тях. По принципа на умножението отговорът е $15 \times 100 = 1\,500$ $\square$

Задача Да се докаже по индукция, че $\forall n \in \mathbb{N}^+$:

$$\frac{1}{1\times 4} + \frac{1}{4\times 7} + \frac{1}{7\times 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)\times(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

Решение: За $n = 1$ имаме $\frac{1}{1\times 4} = \frac{1}{3\times 1+1}$, което е вярно. Допускаме, че $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)\times(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}$ за някое $n \in \mathbb{N}^+$ и разглеждаме $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(3k-2)\times(3k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)\times(3k+1)} + \frac{1}{(3(n+1)-2)\times(3(n+1)+1)}$. Прилагаме индукционната хипотеза и отваряме скобите в знаменателя и получаваме:

$$\frac{n}{3n+1} + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{n(3n+4)+1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{3n^2+4n+1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{(3n+1)(n+1)}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{n+1}{3(n+1)+1}$$

$\square$

Задача Да се докаже по индукция, че $\forall n \in \mathbb{N}^+$:

$$\frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{3\times 5} + \frac{1}{5\times 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)\times(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

Решение: За $n = 1$ имаме $\frac{1}{1\times 3} = \frac{1}{2\times 1+1}$, което е вярно. Допускаме, че $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)\times(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$ за някое $n \in \mathbb{N}^+$ и разглеждаме $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)\times(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)\times(2k+1)} + \frac{1}{(2(n+1)-1)\times(2(n+1)+1)}$. Прилагаме индукционната хипотеза и отваряме скобите в знаменателя и получаваме:

$$\frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+4)} = \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}$$

$\square$

Задача Нека $A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, 10^{14} \leq x \leq 10^{15} - 1\}$. За всяко $n \in \mathbb{N}$ означаваме с $N_3(n)$ броя на цифрите 3 в записа на n в десетична бройна система, примерно $N_3(758) = 0$ и $N_3(12\,343) = 2$. Нека $\mathbf{Rel} \subseteq A \times A$ е релацията

$$\mathbf{Rel} = \{(a, b) \,|\, a \in A \land b \in A \land N_3(a) = N_3(b)\}$$

Докажете или опровергайте, че **Rel** е релация на еквивалентност. Ако е релация на еквивалентност, определете класовете ѝ на еквивалентност.

Решение: Релацията е рефлексивна, симетрична и транзитивна, което следва непосредствено от свойствата на релацията "равенство":

рефлексивност тривиално е рефлексивна,

симетричност ако едно число има цифри 3 в записа си колкото друго, то и другото има толкова, колкото първото,

транзитивност ако едно число има толкова цифри 3 в записа си колкото друго, а другото колкото трето, то първото има толкова, колкото третото.

Следователно, релацията е релация на еквивалентност. Лесно се вижда, че $\forall n \in A : N_3(n) \in \{0, 1, \ldots, 15\}$. Релацията има 16 класа на еквивалентност, като i-ият клас, $0 \leq i \leq 15$, се състои точно от числата, имащи i на брой цифри 3 в записа си. $\square$

Задача Нека $A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq x \leq 10^{21} - 1\}$. За всяко $n \in \mathbb{N}$ означаваме с $N(n)$ броя на цифрите в записа на n в десетична бройна система, примерно $N(131) = 3$ и $N(68\,404) = 5$. Нека $\mathbf{Rel} \subseteq A \times A$ е релацията

$$\mathbf{Rel} = \{(a, b) \,|\, a \in A \land b \in A \land N(a) = N(b)\}$$

Докажете или опровергайте, че **Rel** е релация на еквивалентност. Ако е релация на еквивалентност, определете класовете ѝ на еквивалентност.

Решение: Релацията е рефлексивна, симетрична и транзитивна, което следва непосредствено от свойствата на релацията "равенство":

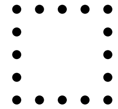
рефлексивност тривиално е рефлексивна,

симетричност ако едно число има толкова цифри в записа си колкото друго, то и другото има толкова, колкото първото,

транзитивност ако едно число има толкова цифри в записа си колкото друго, а другото колкото трето, то първото има толкова, колкото третото.

Следователно, релацията е релация на еквивалентност. Лесно се вижда, че $\forall n \in A : N(n) \in \{1, 2, \ldots, 21\}$. Релацията има 21 класа на еквивалентност, като i-ият клас, $1 \leq i \leq 21$ се състои точно от числата, имащи i на брой цифри в записа си. $\square$

Задача Шестнадесет точки са разположени в равнината както е показано на фигурата долу. Колко различни триъгълника имат върхове измежду тези точки?



Решение: Всяко подмножество от три точки определя един триъгълник тогава и само тогава, когато трите точки не са колинеарни. От броя на всички възможни избирания на 3 точки от 16 премахваме броя на тези избирания, при които точките са колинеарни. Избиранията, при които три точки са колинеарни, са $4\binom{5}{3}$, защото трите колинеарни точки може да са—едновременно—върху всяка от четирите страни, а всяка страна съдържа пет точки. Отговорът е $\binom{16}{3} - 4 \cdot \binom{5}{3} = 520$. $\square$

Задача Опишете всички частични наредби над множеството $\{a, b, c\}$, за които c е единствен минимален елемент.

Решение: Релациите са

$$R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (c, a), (a, b), (c, b)\}$$
$$R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (c, b), (b, a), (c, a)\}$$
$$R_3 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (c, a), (c, b)\}$$

$\square$

Задача Дадена е група от 45 човека, всеки от които изучава поне един от езиците английски, немски, френски и испански. Колко човека изучават английски, френски и испански, ако е известно, че 26 души учат английски, 23 немски, 18 френски, 26 испански, 10 английски и немски, 11 английски и френски, 16 английски и испански, 8 немски и френски, 10 немски и испански, 11 френски и испански, 4 английски, немски и френски, 5 английски, немски и испански, 3 немски, френски и испански, и 2 души учат и четирите езика?

Решение: Нека x е търсеното число. От принципа на включване и изключване имаме

$$45 = 26 + 23 + 18 + 26 - (10 + 11 + 16 + 8 + 10 + 11) + 4 + 5 + x + 3 - 2$$

Лесно се вижда, че $x = 8$. $\square$

Задача Докажете или опровергайте, без да използвате табличния метод, че за всеки три множества A, B и C е вярно следното твърдение:

а) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

б) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \cup C)$.

За доказателство е допустимо да използвате само разсъждения и изучавани еквивалентни преобразувания, а за опровержение, само контрапример. Диаграмите на Вен не може да се използват нито за доказателство, нито за опровержение.

Решение: Първото твърдение е вярно. Ще го покажем това с разсъждения. Множеството $(A \setminus B) \times C$ се състои от всички наредени двойки (x, y), такива че $x \in A \setminus B \wedge y \in C$, тоест

$$x \in A \wedge x \notin B \wedge y \in C \tag{1}$$

Множеството $(A \times C) \setminus (B \times C)$ се състои от всички наредени двойки (u, v), такива че $(u, v) \in A \times C$ и $(u, v) \notin B \times C$. Имаме

$$(u \in A \wedge v \in C) \wedge \neg(u \in B \wedge v \in C) \leftrightarrow \qquad \text{(закон на Де Морган)}$$
$$(u \in A \wedge v \in C) \wedge (\neg(u \in B) \vee \neg(v \in C)) \leftrightarrow \quad \text{(дистрибутивност на конюнкция върху дизюнкция)}$$
$$((u \in A \wedge v \in C) \wedge (\neg(u \in B))) \vee ((u \in A \wedge v \in C) \wedge (\neg(v \in C))) \leftrightarrow \quad \text{(асоциативност)}$$
$$(u \in A \wedge v \in C \wedge u \notin B) \vee (u \in A \wedge \underbrace{v \in C \wedge \neg(v \in C)}_{\text{ЛЪЖА}}) \leftrightarrow$$
$$(u \in A \wedge v \in C \wedge u \notin B) \vee (u \in A \wedge \text{ЛЪЖА}) \leftrightarrow \quad \text{(свойства на лъжата)}$$
$$(u \in A \wedge v \in C \wedge u \notin B) \vee \text{ЛЪЖА} \leftrightarrow \quad \text{(свойства на лъжата)}$$
$$u \in A \wedge v \in C \wedge u \notin B \leftrightarrow \qquad \text{(комутативност)}$$
$$u \in A \wedge u \notin B \wedge v \in C \tag{2}$$

Забелязваме, че (1) и (2) са еднакви с точност до име на променлива. Следователно, множествата имат едни и същи елементи.

Второто твърдение не е вярно. Нека $A = \{1, 4, 6, 7\}$, $B = \{2, 4, 5, 7\}$, $C = \{3, 5, 6, 7\}$. Тогава $(A \setminus B) \cup C = \{1, 3, 5, 6, 7\}$, а $(A \cup C) \setminus (B \cup C) = \{1\}$.

□

Задача Докажете или опровергайте, без да използвате табличния метод, че за всеки три множества A, B и C е вярно следното твърдение:

а) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

б) $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$.

За доказателство е допустимо да използвате само разсъждения и изучавани еквивалентни преобразувания, а за опровержение, само контрапример. Диаграмите на Вен не може да се използват нито за доказателство, нито за опровержение.

Решение: Първото твърдение е вярно. Ще го покажем това с разсъждения. Множеството $A \times (B \setminus C)$ се състои от всички наредени двойки (x, y), такива че $x \in A \wedge y \in (B \setminus C)$, тоест

$$x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C \tag{3}$$

Множеството $(A \times B) \setminus (A \times C)$ се състои от всички наредени двойки (u, v), такива че $(u, v) \in A \times B$ и $(u, v) \notin A \times C$. Имаме

$$\begin{aligned}
&(u \in A \wedge v \in B) \wedge \neg(u \in A \wedge v \in C) \leftrightarrow \qquad \text{(закон на Де Морган)}\\
&(u \in A \wedge v \in B) \wedge (\neg(u \in A) \vee \neg(v \in C)) \leftrightarrow \quad \text{(дистрибутивност на конюнкция върху дизюнкция)}\\
&((u \in A \wedge v \in B) \wedge (\neg(u \in A))) \vee ((u \in A \wedge v \in B) \wedge (\neg(v \in C))) \leftrightarrow \quad \text{(асоциативност)}\\
&(u \in A \wedge v \in B \wedge \neg(u \in A)) \vee (u \in A \wedge v \in B \wedge v \notin C) \leftrightarrow \quad \text{комутативност}\\
&(\underbrace{u \in A \wedge \neg(u \in A)}_{\text{ЛЪЖА}} \wedge v \in B) \vee (u \in A \wedge v \in B \wedge v \notin C) \leftrightarrow \quad \text{свойства на лъжата}\\
&(\text{ЛЪЖА} \wedge v \in B) \vee (u \in A \wedge v \in B \wedge v \notin C) \leftrightarrow \quad \text{свойства на лъжата}\\
&\text{ЛЪЖА} \vee (u \in A \wedge v \in B \wedge v \notin C) \leftrightarrow \quad \text{свойства на лъжата}\\
&u \in A \wedge v \in B \wedge v \notin C
\end{aligned} \tag{4}$$

Забелязваме, че (3) и (4) са еднакви с точност до име на променлива. Следователно, множествата имат едни и същи елементи.

Второто твърдение не е вярно. Нека $A = \{1, 4, 6, 7\}$, $B = \{2, 4, 5, 7\}$, $C = \{3, 5, 6, 7\}$. Тогава $(A \cup B) \cap C = \{5, 6, 7\}$, а $A \cup (B \cap C) = \{1, 4, 5, 6, 7\}$. □
