Домашно №3 по Дискр. Структрури за II поток КН, зимен семестър 2012/2013 г.

Тема: теория на графите

Пишете подробни отговори.

3 т. **Зад. 1:** Нека Γ е множеството от крайните неориентирани графи, чиито върхове са поне 3 и всеки от върховете е с четна степен. Да се докаже или опровергае, че всеки граф $G \in \Gamma$ има поне три върха с равни степени.

3 т. **Зад. 2:** Докажете, че граф е двуделен тогава и само тогава, когато няма цикли с нечетна дължина.

Зад. 3: Разгледайте множествата $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$, дефинирани както следва:

Дефиниция 1. $\mathcal{T}_1 = \{T \mid T$ *е дърво с поне едно ребро и* T *няма върхове от степен* $2\}$.□

Дефиниция 2.

- *Всеки свързан граф с точно два върха е в* $\mathcal{T}_2$. *За всеки такъв граф* $G(\{u, v\}, \{(u, v)\})$ *множеството от* граничните върхове на G *е* $\{u, v\}$.
- *Ако*
  - $G(V, E)$ *е граф от* $\mathcal{T}_2$ *и*
  - $U \subseteq V$ *е множеството от граничните върхове на* D *и*
  - z *е произволен връх от* U *и*
  - W *е множество върхове, такова че* $|W| \geq 2$ *и* $W \cap V = \emptyset$,

  то $G'\big(V \cup W, E \cup \{(z, w) \mid w \in W\}\big)$ *също е граф от* $\mathcal{T}_2$ *и множеството от граничните върхове на* G' *е* $(U \setminus \{z\}) \cup W$.
- *В* $\mathcal{T}_2$ *няма други графи.* □

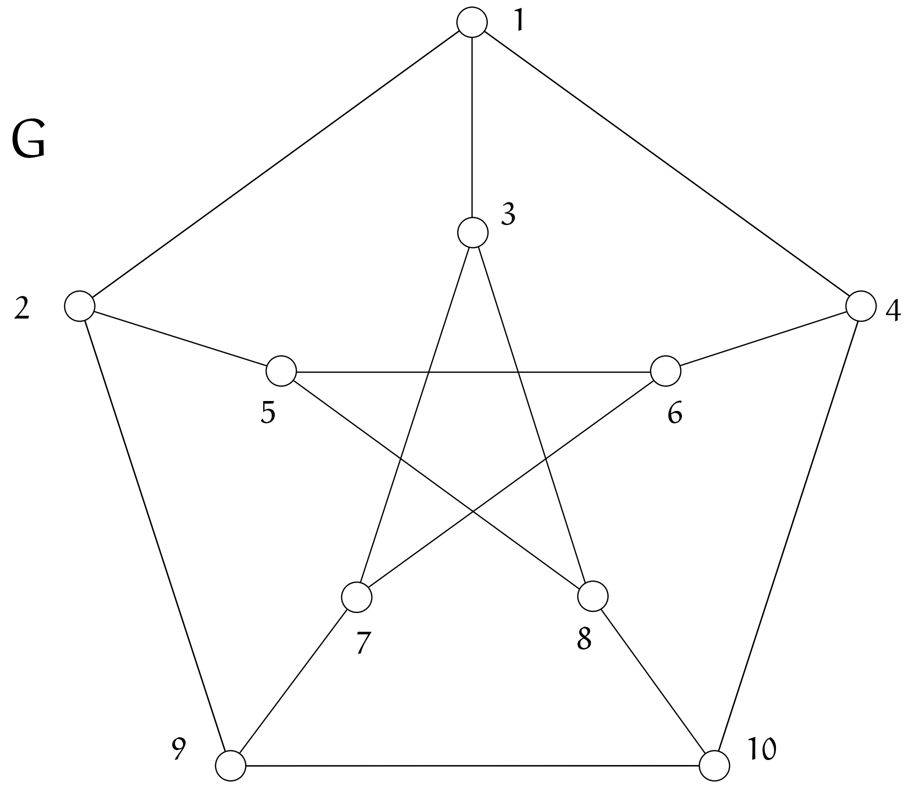
Направете следните доказателства, базирани на тези две дефиниции.

1 т. **а)** Докажете, че $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.

1 т. **б)** Докажете, че $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$.

3 т. **в)** Използвайки **а)** и **б)** докажете по индукция, че за всяко дърво с поне едно ребро, което няма върхове от степен 2, е вярно, че броят на върховете от степен 1 е $\geq \frac{n}{2} + 1$, където n е броят на всички върхове.

Зад. 4: Разгледайте следния граф $G(I_{10}, E)$:



1 т. **а)** Докажете или опровергайте, че G е 2-оцветим.

2 т. **б)** Докажете или опровергайте, че G е 3-оцветим.

1 т. **в)** Докажете или опровергайте, че в G има Хамилтонов път.

1 т. **г)** Докажете или опровергайте, че в G има Ойлеров път.

3 т. **д)** Докажете, че всяко пет елементно подмножество от върхове индуцира подграф с поне едно ребро. *Указание: доказателството трябва да е по-икономично от проверяване на твърдението за всички* $\binom{10}{5} = 252$ *пет елементни подмножества.*

Зад. 5: За графа от **Зад. 4** въвеждаме тегловна функция $c : E \to \mathbb{N}^{+}$, такава че

$$\forall (u, v) \in E : c(u, v) = u + v$$

1 т. **а)** Намерете минимално покриващо дърво на G .

1 т. **б)** Какво бихте казали за същата задача, ако е зададена друга тегловна функция w

$$\forall (u, v) \in E : w(u, v) = 2u + v$$

Следната задача е бонус. Ако не я решите, не губите нищо. Ако я решите, имате 8 точки бонус. Решение с "груба сила", тоест систематично изброяване на всички възможни конфигурации, не се приема. Решение без солидна аргументация също не се приема.

Зад. 6: *Балансиран битов вектор* е такъв, в който броя на нулите е равен на броя на единиците. Разгледайте следния балансиран битов вектор:

```
0 1 1 1 0 1 0 0
```

Нека това е кръгова наредба, тоест мислете си, че тези битове в този ред са написани равномерно в посока на часовниковата стрелка върху окръжност, която можем да въртим произволно около центъра:

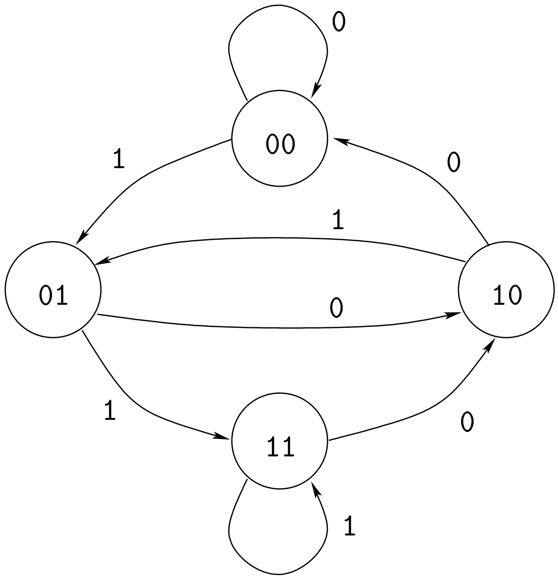
```
        0
    0       1

  0           1


    1       1
        0
```

Тази наредба има свойството, че множеството от всички осем подвектори с дължина 3 са точно осемте различни битови вектори с дължина 3. Иначе казано, ако "извлачим" един прозорец с дължина 3 по цялата наредба, в него ще видим всички възможни вектори от 3 бита, всеки от тях точно един път:

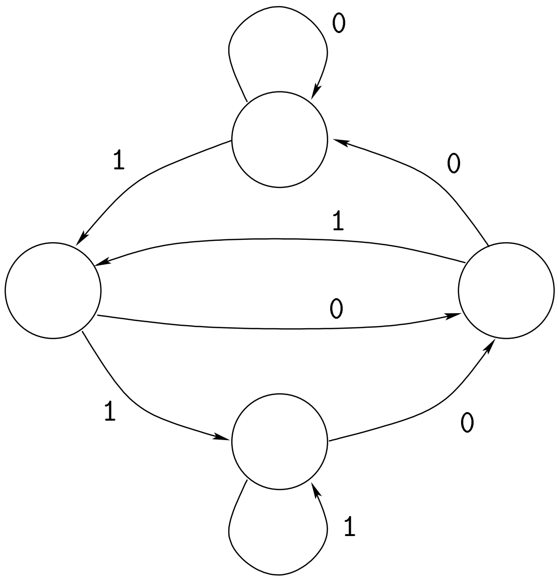
0	1	1	1	0	1	0	0	011
0	1	1	1	0	1	0	0	111
0	1	1	1	0	1	0	0	110
0	1	1	1	0	1	0	0	101
0	1	1	1	0	1	0	0	010
0	1	1	1	0	1	0	0	100
0	1	1	1	0	1	0	0	000
0	1	1	1	0	1	0	0	001

Конструирайте аналогична балансирана кръгова наредба от 16 бита, в която, ако влачим прозорец с дължина 4, да видим всички битови вектори с дължина 4, всеки от тях точно един път.

Упътване: Помислете каква е връзката между наредбата от осемте бита и този граф:



Това е ориентиран граф. Върховете са именувани с векторите с дължина 2, а ребрата с единични битове. За да видите връзката по-ясно, игнорирайте за момент имената на върховете:



Имената на върховете нямат значение, ако искаме само да видим връзката между обхождането на графа и наредбата от осемте бита. Имената на върховете са важни, за да разберем как е построен графът.