Примерни решения на домашно № 2, 4 април 2021 г.

Задача 1: Нека $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Докажете, че $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Решение: Ще докажем твърдението със силна индукция по n.

База: Базовите случаи са $n = 0$ и $n = 1$. За $n = 0$, твърдението е, че $x^0 + \frac{1}{x^0}$ е цяло число. Тъй като $x \neq 0$, $x^0 = 1$, така че $x^0 + \frac{1}{x^0} = 1 + 1 = 2$, което, без съмнение, е цяло число. За $n = 1$, твърдението е, че $x^1 + \frac{1}{x^1}$ е цяло число, което е вярно по условие. ✓

Индуктивно предположение: До допуснем, че за някое $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ е вярно, че $x^k + \frac{1}{x^k} \in \mathbb{Z}$, за всяко $k \in \{0, 2, \ldots, n-1\}$.

Ще докажем, че $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$. За целта ще разгледаме произведението

$$X = \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) \tag{1}$$

Съгласно индуктивното предположение, $\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right)$ е цяло число. По условие, $\left(x + \frac{1}{x}\right)$ е цяло число. Произведението на цели числа е цяло число, следователно X е цяло число. Да отворим скобите. Тогава

$$\begin{aligned} X &= x^{n-1} \cdot x + x^{n-1} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^{n-1}} \cdot x + \frac{1}{x^{n-1}} \cdot \frac{1}{x} \\ &= x^n + x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n} \\ &= \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) \end{aligned}$$

Но тогава

$$x^n + \frac{1}{x^n} = X - \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) \tag{2}$$

Както знаем, X е цяло число, а $\left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right)$ е цяло число от индуктивното предположение. Тогава дясната страна на (2) е цяло число, откъдето следва, че $x^n + \frac{1}{x^n}$ е цяло число. ✓

Задача 2: Нека $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Нека S_n е множеството от пермутациите на числата 1, 2, …, n. Ако $\pi_1, \pi_2 \in S_n$ са пермутации, казваме, че π_1 се получава от π_2 чрез *транспозиция*, ако π_1 се получава от π_2 чрез размяна на точно две числа. Примерно, ако $n = 5$ и

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 2\,1\,3\,4\,5 \\ \pi_2 &= 4\,1\,3\,2\,5 \\ \pi_3 &= 1\,4\,3\,2\,5 \end{aligned}$$

то π_1 се получава от π_2 чрез транспозиция (също така е вярно, че π_2 се получава от π_1 чрез транспозиция) и π_2 се получава от π_3 чрез транспозиция, но не е вярно, че π_1 се получава от π_3 чрез транспозиция.

Докажете или опровергайте, че за всяко $n \geq 2$, за всеки две различни пермутации $\pi', \pi'' \in S_n$ е вярно, че π' се получава от π'' чрез серия от транспозиции.

Решение: Твърдението е вярно и ще го докажем с обикновена индукция по n. Базата е $n = 2$, като очевидно $|S_n| = 2$ и всяка оп пермутациите $1\,2$ и $2\,1$ се получава от другата чрез серия от точно една транспозиция.

Да допуснем, че твърдението е вярно за някое $n \geq 2$. Разглеждаме S_{n+1}. Множеството S_{n+1} се разбива на

- S': пермутациите от S_{n+1}, в които $n+1$ е на позиция $n+1$ (образно казано, в десния край).
- S'': пермутациите от S_{n+1}, в които $n+1$ не е на позиция $n+1$.

Разглеждаме произволни различни пермутации $\sigma, \tau \in S_{n+1}$. Следните случаи са изчерпателни.

Случай 1: $\sigma \in S'$ и $\tau \in S'$. С други думи, и σ, и τ завършват с $n+1$. Нека σ' е векторът с дължина n, който се получава от σ при премахване на $n+1$. Нека τ' е векторът с дължина n, който се получава от τ при премахване на $n+1$. Очевидно е, че както σ', така и τ' са елементи на S_n и за тях индуктивното предложение е в сила. Щом σ' се получава от τ' чрез серия от транспозиции, то очевидно σ се получава от τ чрез същата серия от транспозиции, само че във всяка междинна пермутация има едно $n+1$ накрая.

Случай 2: Точно едната от σ и τ е в S'. БОО, нека $\sigma \in S_{n+1}$. Тогава в τ числото $n+1$ не е на позиция $n+1$, но то е някъде. Да кажем, че в τ числото $n+1$ е на позиция k, за $1 \leq k \leq n$. С една транспозиция, разменяйки числата на позиции k и $n+1$, трансформираме τ в пермутация ψ. Очевидно, $\psi \in S'$ и ψ се получава от τ чрез серия от транспозиции. Щом и σ, и ψ са в S', то σ се получава от ψ чрез серия от транспозиции като **Случай 1**. Тогава очевидно σ се получава от τ чрез серия от транспозиции.

Случай 3: Нито едната от σ и τ не е в S'. Тогава Тогава в σ числото $n+1$ не е на позиция $n+1$, но то е някъде. Да кажем, че в σ числото $n+1$ е на позиция k, за $1 \leq k \leq n$. С една транспозиция, разменяйки числата на позиции k и $n+1$, трансформираме σ в пермутация α. След това продължаваме като в **Случай 2**.

Задача 3: На контролно по Дискретна математика са били дадени три задачи. Известно е, че 80% от студентите са решили първата задача, 75% са решили втората задача и 70% са решили третата задача. Докажете формално и прецизно, че поне 25% са решили и трите задачи.

Решение: Нека A е множеството от студентите, които не са решили първата задача. Нека B е множеството от студентите, които не са решили втората задача.

Нека C е множеството от студентите, които не са решили третата задача. Нека n е броят на всички студенти, които са се явили на контролното. По условие,

$$\begin{aligned}|A| &= 0.2n\\ |B| &= 0.25n\\ |C| &= 0.3n\end{aligned}$$

Очевидно, $|A| + |B| + |C| = 0.75n$.

Ще покажем, че

$$|A \cup B \cup C| \leq |A| + |B| + |C| \tag{3}$$

Наистина, от комбинаторния принцип на включването и изключването знаем, че

$$|A \cup B \cup C| \leq |A| + |B| + |C| - \big((|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) - |A \cap B \cap C| \big) \tag{4}$$

Но очевидно

$$\begin{aligned}A \cap B &\supseteq A \cap B \cap C\\ A \cap C &\supseteq A \cap B \cap C\\ B \cap C &\supseteq A \cap B \cap C\end{aligned}$$

откъдето веднага следва, че

$$\begin{aligned}|A \cap B| &\geq |A \cap B \cap C|\\ |A \cap C| &\geq |A \cap B \cap C|\\ |B \cap C| &\geq |A \cap B \cap C|\end{aligned}$$

Тогава

$$|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| \geq 3|A \cap B \cap C|$$

откъдето

$$|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| \geq |A \cap B \cap C|$$

така че

$$|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C| \geq 0$$

От този резултат и (4) заключаваме, че (3) е в сила. От (3) и това, че $|A|+|B|+|C| = 0.75n$ заключаваме, че

$$|A \cup B \cup C| \leq 0.75n \tag{5}$$

Универсумът U в тази задача е множеството от студентите, които са се явили на контролното. Спрямо този универсум:

- множеството от студентите, които са решили първата задача, е $\overline{A}$,

- множеството от студентите, които са решили втората задача, е $\overline{B}$,
- множеството от студентите, които са решили третата задача, е $\overline{C}$,
- множеството от студентите, които са решили и трите задачи, е $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.

От обобщения закон на De Morgan знаем, че $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \overline{A \cup B \cup C}$. Но по определение е вярно, че

$$\overline{A \cup B \cup C} = U \setminus (A \cup B \cup C) \tag{6}$$

Съгласно комбинаторния принцип на изваждането

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = |U| - |A \cup B \cup C| \tag{7}$$

От (7), от факта, че $|U| = n$ и от факта, че $|A \cup B \cup C| \leq 0.75n$ и заключаваме, че

$$|\overline{A \cup B \cup C}| \geq 0.25n$$

което е същото като

$$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| \geq 0.25n$$

С други думи, студентите, които са решили и трите задачи, са поне 25%.

Задача 4: Нека n е естествено число. Докажете с комбинаторни разсъждения тъждеството

$$\binom{n+3}{5} = \sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} \binom{n-k+2}{2}$$

Решение: Разглеждаме множеството $S = \{1, 2, \ldots, n, n+1, n+2, n+3\}$. Нека

$$X = \{Y \subseteq S \,:\, |Y| = 5\}$$

Лявата страна $\binom{n+3}{5}$ е равна на $|X|$ по определение.

Дясната страна също брои $|X|$, но по-детайлно. Разбиваме X на множества Z_1, Z_2, $\ldots$, Z_t така: във всяко Z_i, всички елементи на Z_i (а те са 5-елементни множества) имат един и същи трети по големина елемент m. Нека подмножеството на Z_i от първия и втория по големина елемент се нарича Z'_i, а подмножеството на Z_i от четвъртия и петия по големина елемент се нарича Z''_i. Точните долна и горна граница за m са съответно 3 и $n+1$.

- Ако $m = 3$, то $Z'_i \subseteq \{1, 2\}$, а $Z''_i \subseteq \{4, 5, \ldots, n+3\}$.
- Ако $m = 4$, то $Z'_i \subseteq \{1, 2, 3\}$, а $Z''_i \subseteq \{5, 6, \ldots, n+3\}$.
- Ако $m = 5$, то $Z'_i \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$, а $Z''_i \subseteq \{6, 7, \ldots, n+3\}$.

- И така нататък.
- Ако $m = n$, то $Z_i' \subseteq \{1, 2, \ldots, n-1\}$, а $Z_i'' \subseteq \{n+1, n+2, n+3\}$.
- Ако $m = n+1$, то $Z_i' \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, а $Z_i'' \subseteq \{n+2, n+3\}$.

Сега се вижда, че за всяка възможна стойност на m, броят на начините да изберем двуелементното Z_i' са $\binom{m-1}{2}$, а броят на начините да изберем двуелементното Z_i'' са $\binom{n+3-m}{2}$, като произведението $\binom{m-1}{2}\binom{n+3-m}{2}$ е броят на начините да изберем Z_i' и Z_i''. Избирайки Z_i' и Z_i'', ние напълно определяме Z_i, понеже m е фиксирано.

Нека k означава $m-1$. Тогава $2 \leq k \leq n$, а за всяко k, начините да изберем съответното Z_i са $\binom{k}{2}\binom{n+3-m}{2} = \binom{k}{2}\binom{n+2-m+1}{2} = \binom{k}{2}\binom{n+2-k}{2}$.

Тъй като X се разбива на Z_1, Z_2, …, Z_t, съгласно комбинаторния принцип на разбиването,

$$|X| = \sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2}\binom{n+2-k}{2}$$

Доказахме, че

$$\binom{n+3}{5} = \sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2}\binom{n-k+2}{2}$$