Решение на домашно №3 по Дискр. Структрури за II поток КН, зимен семестър 2012/2013 г.

3 т. **Зад. 1:** Нека Γ е множеството от крайните неориентирани графи, чиито върхове са поне 3 и всеки от върховете е с четна степен. Да се докаже или опровергае, че всеки граф $G \in \Gamma$ има поне три върха с равни степени.

Решение: Твърдението е вярно. Ще използваме следната нотация.

Нотация 1. *Нека* $G(V, E)$ *е произволен неориентиран граф. За всеки връх* $u \in V$*, с "*$d(u)$*" означаваме степента на* u *и*

$$D(G) = \{d(u) \,|\, u \in V\}$$

$\forall k \in D(G)$*, "*$\#_k(G)$*" е броят на върховете от степен* k *в* G*. И накрая,*

$$\#_{max}(G) = \max\{\#_k(G) \,|\, k \in D(G)\} \qquad \square$$

Нека n е броят на върховете в графа, който разглеждаме. Очевидно е, че $|D(G)|$ и $\#_{\max}(G)$ налагат известно ограничение отгоре върху n, а именно:

$$n \leq |D(G)|.(\#_{\max}(G)) \tag{1}$$

Известно е, че за произволен неориентиран граф G', $D(G') \subseteq \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Очевидно $\forall G \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} &D(G) \subseteq \{0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ n-2\} &&\text{при } n \text{ четно} \\ &D(G) \subseteq \{0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ n-1\} &&\text{при } n \text{ нечетно} \end{aligned}$$

Ако n е четно, $\big|\{0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ n-2\}\big| = \frac{n}{2} = \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$. Ако е нечетно, пак $\big|\{0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ n-1\}\big| = \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$. Тогава $|D(G)| \leq \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$ за всяка допустима стойност на n.

Да разгледаме произволен $G \in \Gamma$. Първо да разгледаме случая, в който G няма върхове от степен нула. Тъй като $0 \notin D(G)$, то $|D(G)| \leq \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 1$. Да допуснем, че $\#_{\max}(G) \leq 2$. Съгласно (1):

$$n \leq 2\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 1\right) \leftrightarrow \frac{n}{2} \leq \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 1$$

В действителност $\frac{n}{2} > \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 1$: за четни n, тоест $n = 2k$, имаме $k > k-1$, а за нечетни n, тоест $n = 2k+1$, имаме $k + \frac{1}{2} > k+1-1$, където $k \in \mathbb{N}^+$. Следователно допускането, че $\#_{\max}(G) \leq 2$, е грешно.

Сега да разгледаме случая, в който G има поне един връх от степен нула. Да разгледаме подслучая, в който n е нечетно. Тогава

$$D(G) \subseteq \{0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ n-3\}$$

Множество не може да съдържа $n-1$, защото е невъзможно да има върхове от степени нула и $n-1$. Тогава $|D(G)| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Да допуснем, че $\#_{\max}(G) \leq 2$. Съгласно (1):

$$n \leq 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leftrightarrow \frac{n}{2} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

В действителност, $\frac{n}{2} > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$: нека $n = 2k+1$ за някое $k \in \mathbb{N}^+$ и имаме $k + \frac{1}{2} > k$. Следователно допускането, че $\#_{\max}(G) \leq 2$, е грешно. Остана да разгледаме подслучая, в който n е четно. Тогава

$$D(G) \subseteq \{0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ n-2\}$$

Да допуснем, че $\#_{\max}(G) \leq 2$. Тъй като $\left|\{0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ n-2\}\right| = \frac{n}{2}$, трябва да има точно два върха от всяка от степените 0, 2, ..., $n-2$. Веднага се вижда, че е невъзможно да има два върха от степен нула и връх от степен $n-2$, тъй като върхът от степен $n-2$ не може да е съсед нито на себе си, нито на двата върха от степен нула. Следователно допускането, че $\#_{\max}(G) \leq 2$, е грешно. □

3 т. **Зад. 2:** Докажете, че граф е двуделен тогава и само тогава, когато няма цикли с нечетна дължина.

Решение: Известно е, че граф да бъде двуделен е същото като да бъде оцветим с два цвята. За удобство ще използваме формулировката с оцветяване, да речем с бял и черен цвят. Нека съжденията в биимпликацията, спрямо произволен граф G, са p и q:

$$\underbrace{G \text{ е 2-оцветим}}_{\text{съждение } p} \leftrightarrow \underbrace{G \text{ няма цикли с нечетна дължина}}_{\text{съждение } q}$$

Доказателство, че $p \to q$: Ще докажем еквивалентното $\neg q \to \neg p$, а именно, ако G има поне един цикъл с нечетна дължина, то G не е 2-оцветим. Нека G има цикъл $s = u_1, u_2, \ldots, u_{t-1}, u_t, u_1$, където $u_i \in V(G)$ за $1 \leq i \leq t$ и t е нечетно. Да допуснем, че G е 2-оцветим. Разглеждаме произволен връх от s, без ограничение на общността нека е u_1. Без ограничение на общността да допуснем, че u_1 е бял. Веднага се вижда, че това налага върховете с нечетни индекси да са бели, а тези с четните, черни, така че нито едно от ребрата (u_1, u_2), (u_2, u_3), ..., (u_{t-1}, u_t) да няма краища от един и същи цвят. Но t е нечетно, значи u_t е бял връх, значи двата края на реброто (u_1, u_t) са от един и същи цвят.
Доказателство, че $q \to p$: Да допуснем, че $G(V, E)$ няма цикли с нечетна дължина. Без ограничение на общността допускаме, че G е свързан—ако не е, то долният аргумент може да се направи поотделно за всяка свързана компонента. Нека u е произволен връх. Да разгледаме следното разбиване на V:

$$V_1 = \{v \,|\, \mathrm{dist}(u, v) \text{ е четно число}\}$$
$$V_2 = \{v \,|\, \mathrm{dist}(u, v) \text{ е нечетно число}\}$$

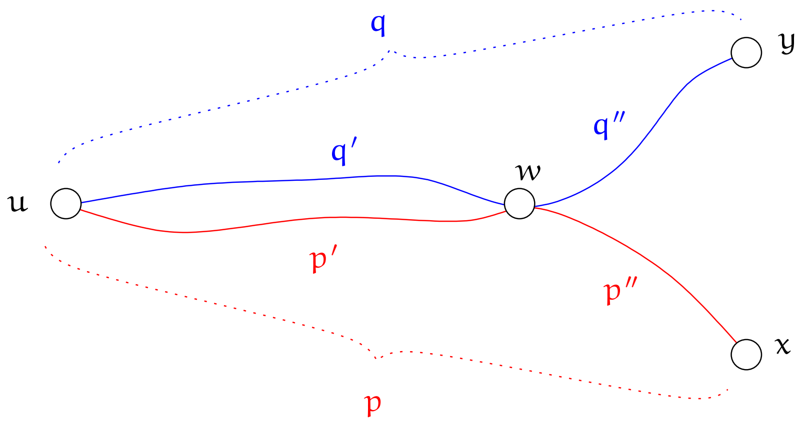
$\mathrm{dist}(u, v)$ означава разстоянието между u и v в G. Нека върховете от V_1 бъдат оцветени в бяло, а тези от V_2, в черно. Ще покажем, че това е валидно оцветяване, тоест че няма ребро, двата края на което са в един и същи цвят. Да допуснем обратното: има ребро

(x, y), такова че двата му края са в един и същи цвят. Без ограничение на общността да допуснем, че x и y са бели. Тогава $\mathrm{dist}(u, x)$ и $\mathrm{dist}(u, y)$ са четни числа. Твърдим, че

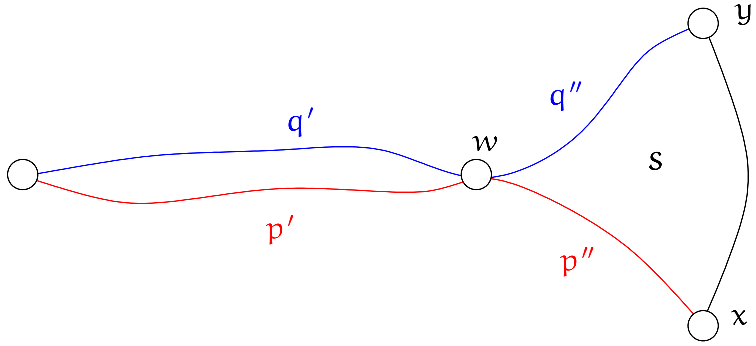
$$\mathrm{dist}(u, x) - \mathrm{dist}(u, y) \in \{-1, 0, 1\}$$

Това е така, защото най-къс път между u и x не може да е по-дълъг от най-къс път между u и y с повече от единица и не може да е по-къс от най-къс път между u и y с повече от единица. От това и от факта, че $\mathrm{dist}(u, x)$ и $\mathrm{dist}(u, y)$ имат една и съща четност следва, че $\mathrm{dist}(u, x) = \mathrm{dist}(u, y)$.

Нека p е най-къс път между u и x, а q е най-къс път между u и y. С $|p|$ означаваме дължината на p, с $|q|$, дължината на q. Както вече знаем, $|p| = |q|$. Двата пътя p и q може да имат и други общи върхове освен u. Нека w е най-отдалеченият от x връх в p, който принадлежи също така и на q (този връх w е и най-отдалеченият от y връх в q, който принадлежи и на p). Да означим с p' подпътят на p между u и w и с p'', подпътят на p между w и x. Да означим с q' подпътят на q между u и w и с q'', подпътят на q между w и y:



Твърдим, че $|p'| = |q'|$. Ако не беше така, единият подпът би бил по-къс от другия, без ограничение на общността $|p'| < |q'|$; тогава, ако заменим q' с p' в q, бихме получили по-къс път между u и y от q, в противоречие с допускането, че q е най-къс път между тези два върха. Щом $|p'| = |q'|$, $|p| = |q|$ и $|p| = |p'| + |p''|$ и $|q| = |q'| + |q''|$, то трябва да е изпълнено $|p''| = |q''|$. Нека $|p''| = |q''| = m$. Тогава цикълът s, състоящ се от p'', q'' и реброто (x, y):



има дължина $m + m + 1 = 2m + 1$, което е нечетно число. Това противоречи на допускането, че няма цикли с нечетна дължина. Следователно, допускането, че има ребро с краища в един и същи цвят, е грешно. $\square$

Зад. 3: Разгледайте множествата $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$, дефинирани както следва:

Дефиниция 1. $\mathcal{T}_1 = \{T \mid T$ *е дърво с поне едно ребро и* T *няма върхове от степен* $2\}$.□

Дефиниция 2.

- *Всеки свързан граф с точно два върха е в* $\mathcal{T}_2$. *За всеки такъв граф* $G(\{u,v\},\{(u,v)\})$ *множеството от* граничните върхове на G *е* $\{u,v\}$.
- *Ако*
  - $G(V,E)$ *е граф от* $\mathcal{T}_2$ *и*
  - $U \subseteq V$ *е множеството от граничните върхове на* D *и*
  - z *е произволен връх от* U *и*
  - W *е множество върхове, такова че* $|W| \geq 2$ *и* $W \cap V = \emptyset$,

  то $G'\big(V \cup W, E \cup \{(z,w) \mid w \in W\}\big)$ *също е граф от* $\mathcal{T}_2$ *и множеството от граничните върхове на* G' *е* $(U \setminus \{z\}) \cup W$.
- *В* $\mathcal{T}_2$ *няма други графи.* □

Направете следните доказателства, базирани на тези две дефиниции.

1 т. **а)** Докажете, че $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.

1 т. **б)** Докажете, че $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$.

3 т. **в)** Използвайки **а)** и **б)** докажете по индукция, че за всяко дърво с поне едно ребро, което няма върхове от степен 2, е вярно, че броят на върховете от степен 1 е $\geq \frac{n}{2}+1$, където n е броят на всички върхове.

Решение:

а) Иска се да докажем, че всички дървета с поне едно ребро, без върхове от степен 2, може да бъдат конструирани от индуктивната дефиниция (Дефиниция 2).

> Първо ще докажем едно помощно твърдение: всяко дърво от $\mathcal{T}_1$ или е единствено ребро, или има поне един връх z, който има поне два съседа от степен 1 и не повече от един съсед, чиято степен е > 1. Очевидно, ако има точно два върха и графът е дърво, то върховете са от степен 1 и дървото е от $\mathcal{T}_1$. Очевидно, не може дърво с точно три върха да бъде в $\mathcal{T}_1$. Да разгледаме произволно дърво $T \in \mathcal{T}_1$ с поне четири върха (очевидно поне едно такова съществува). От това, че T е дърво с поне 4 върха следва, че няма върхове от степен 0 и има поне един връх u от степен > 1. От това, че $T \in \mathcal{T}_1$ следва, че степента на u е > 2. Да превърнем T в кореново дърво с корен u. Ако всички деца на u са само листа, то доказателството е готово—тези деца са повече от две, следователно има връх, а именно u, съседен на поне два върха от степен 1 и на не повече от един връх (а именно, на нула върхове), чиято степен е > 1. Ако u има точно едно дете, което не е листо, то трябва да има поне две деца-листа и доказателството пак е готово. В противен случай (а именно, повече от едно дете, което не е листо), то нека v_1 е произволно дете на u, което

не е листо. Ако всички деца на v_1 са само листа, то доказателството е готово—тези деца са поне две, следователно имаме връх, а именно v_1, съседен на два върха от степен 1 и на точно един връх (а именно, на u), чиято степен е > 1. Ако не всички деца на v_1 са листа, то нека v_2 е дете на v_1, което не е листо. Ако всички деца на v_2 са само листа, то доказателството е готово—тези деца са поне две, следователно имаме връх, а именно v_2, съседен на два върха от степен 1 и на точно един връх (а именно, на v_1), чиято степен е > 1. Ако не всички деца на v_2 са листа, то нека v_3 е дете на v_2, което не е листо. И така нататък. Тъй като графът е краен, редицата от върхове, които разглеждаме, е такава, че поддърветата, вкоренени в нейните върхове, стават все по-малки и по-малки. Рано или късно текущият разглеждан връх v_k ще е такъв, че всичките му деца са листа—а те са задължително поне две, иначе v_k би бил връх от степен 2 в T. Така или иначе, v_k изпълнява желаното условие да има поне два съседа от степен 1 и не повече от един съсед, а именно v_{k-1}, чиято степен е > 1.

Имайки предвид помощното твърдение, доказателството, че всички дървета без върхове от степен 2 може да бъдат конструирани съгласно Дефиниция 2, е тривиално. Нека T е прозволно дърво от $\mathcal{T}_1$. Ако T има точно два върха, то се конструира от базата. В противен случай, съгласно помощното твърдение, T има връх u, имащ поне два съседа от степен 1 и не повече от един съсед v от степен > 1. Ако u има съседи само от степен 1, те са поне три на брой; изтриваме всичките без един (значи, поне два върха) и оставаме с единствено ребро, от което очевидно можем да конструираме T, прилагайки индуктивната стъпка.

Ако u има съсед от степен > 1, той е единствен. Нека T_1 е дървото, получено от T чрез изтриване на съседите на u от степен 1 (поне два такива върха). Прилагаме същите разсъждения за T_1 и виждаме, че или T_1 може да се конструира от индуктивната база, или изтриваме поне два върха от T_1, превръщайки го в T_2. И така нататък. Тъй като T е крайно и на всяка итерация трием по два или повече върхове, рано или късно ще стигнем до дърво T_k, което може да се конструира от индуктивната база. От T_k можем да конструираме T, слагайки изтритите върхове в обратния ред на изтриването им.

б) Иска се да докажем, че всички графи, конструирани съгласно Дефиниция 2, са свързани, без цикли и нямат върхове от степен 2. За графа от базата, а именно единствено ребро, това очевидно е вярно. Да допуснем, че е вярно за графа G от индуктивната стъпка. Тогава G' също е свързан: за всяка двойка върхове a, b от G', ако a и b са от G, те са свързани съгласно индукционната хипотеза, ако точно единият е от G, то той е свързан със z съгласно индукционната хипотеза и оттам през z, с другия, и ако и двата са от W, те са свързани през z с път с дължина 2. Освен това, G' няма цикли—ако допуснем обратното ще излезе, че в G има цикли, защото новодобавените върхове W са от степен 1, а връх от степен 1 не може да участва в цикъл. И накрая, G' няма върхове от степен 2, защото z става връх от степен ≥ 3, върховете от W са от степени 1, а останалите върхове от G' имат същите степени както в G.

в) Нека T е произволно дърво без върхове от степен 2. Чрез **а)** и **б)** доказахме еквивалентността на Дефиниция 1 и Дефиниция 2. Ще използваме индуктивната

Дефиниция 2, за да покажем желаното неравенство за T чрез структурна индукция. Нека p е броят на върховете от степен 1 в T, а n е общият брой на върховете. Ако T е единствено ребро, то $p = 2$ и $n = 2$ и очевидно $2 \geq \frac{2}{2} + 1$. Нека T има повече от два върха. Тогава, съгласно Дефиниция 2, T се получава от някое T', също дърво без върхове от степен 2, чрез добавяне на поне два върха от степен 1 като съседи на връх, който е от степен 1 в T'. Нека k е броят на новодобавените върхове. Тогава T' има $n - k$ върха. Нека T' има p' върха от степен 1. Индуктивното предположение е:

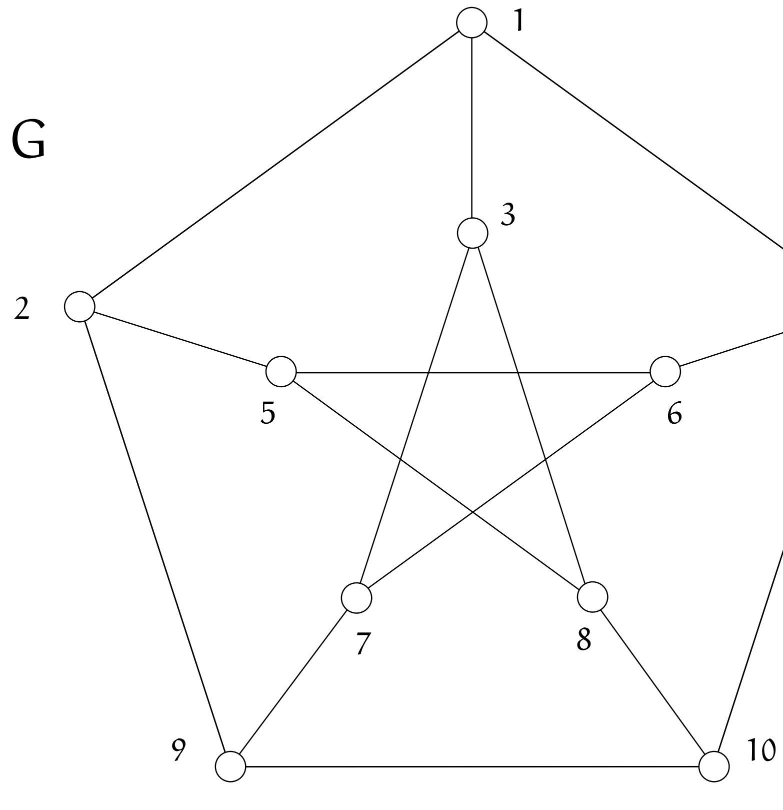
$$p' \geq \frac{n-k}{2} + 1 \qquad \leftrightarrow \qquad p' + \frac{k}{2} \geq \frac{n}{2} + 1 \tag{2}$$

Забележете, че $p = p' - 1 + k$, тъй като добавените k нови върха са от степен 1, но точно един връх от степен 1 в T' не е от степен 1 в T. Понеже $k \geq 2$, в сила е $p \geq p' + \frac{k}{2}$. Оттук и от (2) следва, че

$$p \geq \frac{n}{2} + 1$$

□

Зад. 4: Разгледайте следния граф $G(I_{10}, E)$:



1 т. **а)** Докажете или опровергайте, че G е 2-оцветим.

2 т. **б)** Докажете или опровергайте, че G е 3-оцветим.

1 т. **в)** Докажете или опровергайте, че в G има Хамилтонов път.

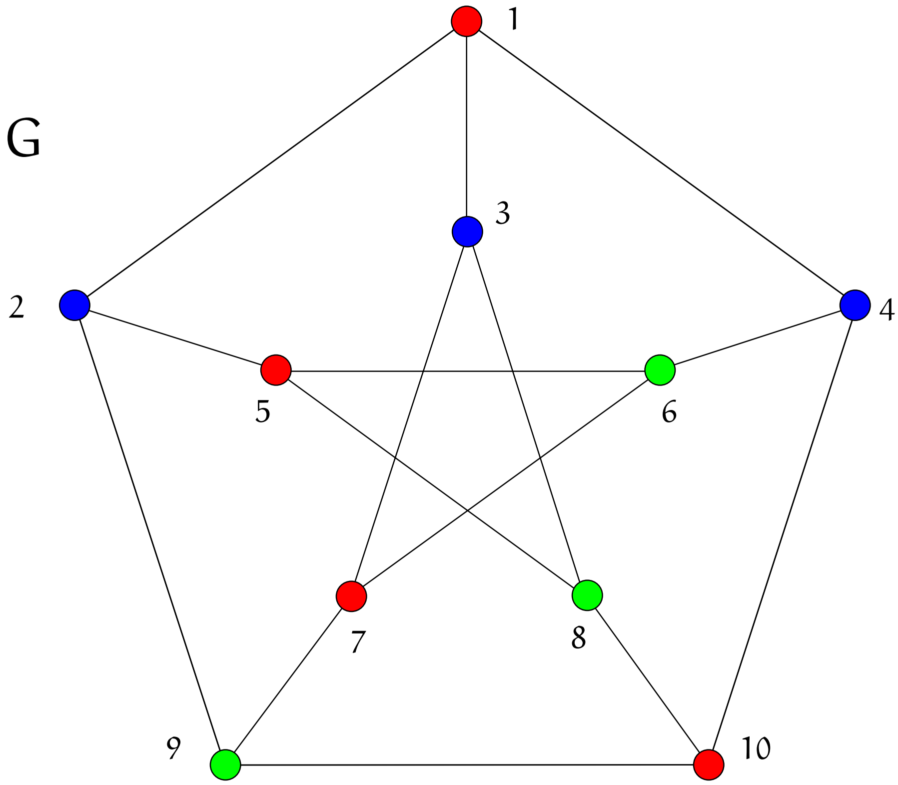
1 т. **г)** Докажете или опровергайте, че в G има Ойлеров път.

3 т. **д)** Докажете, че всяко пет елементно подмножество от върхове индуцира подграф с поне едно ребро.

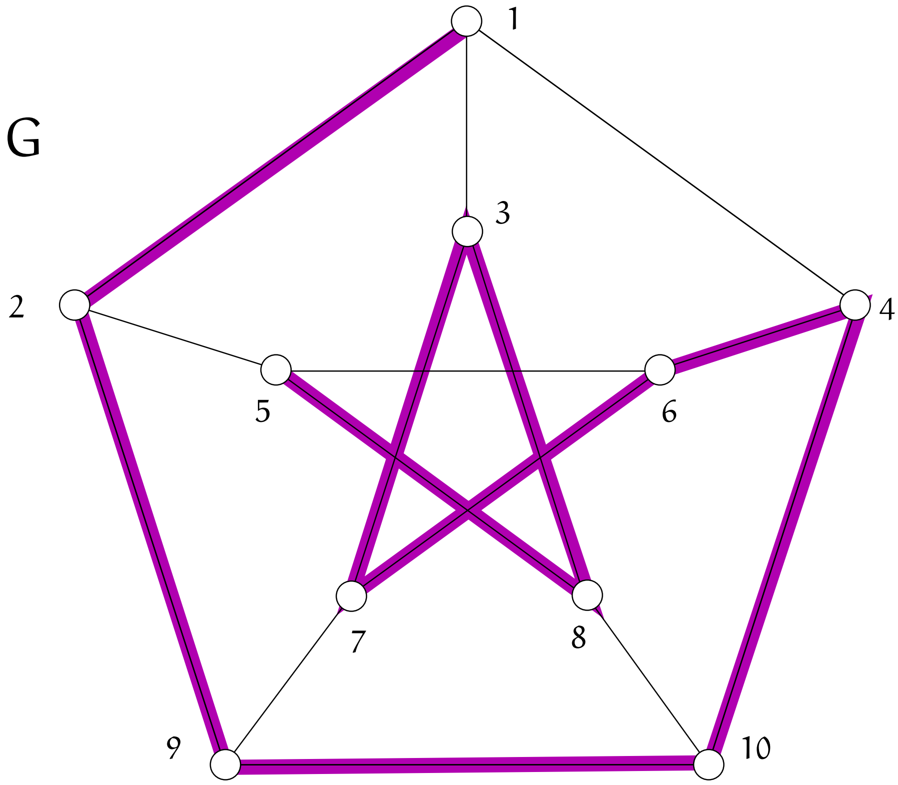
Решение:

а) Очевидно има цикъл с дължина 5 и съгласно **Зад. 2** графът не е 2-оцветим.

б) Ето оцветяване с 3 цвята:

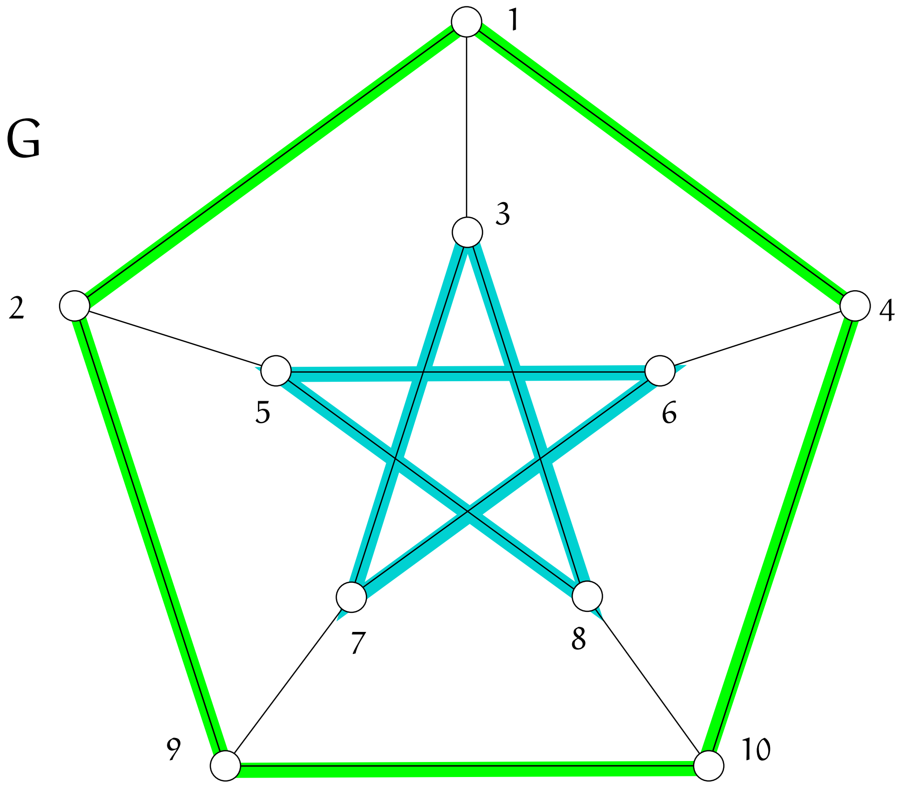


в) Ето един Хамилтонов път:



г) Ойлеров път няма, понеже не е вярно, че точно два върха са от нечетна степен.

д) Разгледайте тези два цикъла, всеки с дължина 5:



Принадлежността към тях е разбиване на множеството от десетте върха, понеже няма връх, който да не е в тях, а те нямат общ връх. Да разгледаме произволно пет елементно подмножество от върхове U. От обощения принцип на Дирихле следва, че за един от тези цикли поне три върха от U са в него. Очевидно, че както и да подбираме три върха от цикъл с дължина 5, има ребро от цикъла, и двата края на което са измежду подбраните върхове.

$\square$

Зад. 5: За графа от **Зад. 4** въвеждаме тегловна функция $c : E \to \mathbb{N}^+$, такава че

$$\forall (u, v) \in E : c(u, v) = u + v$$

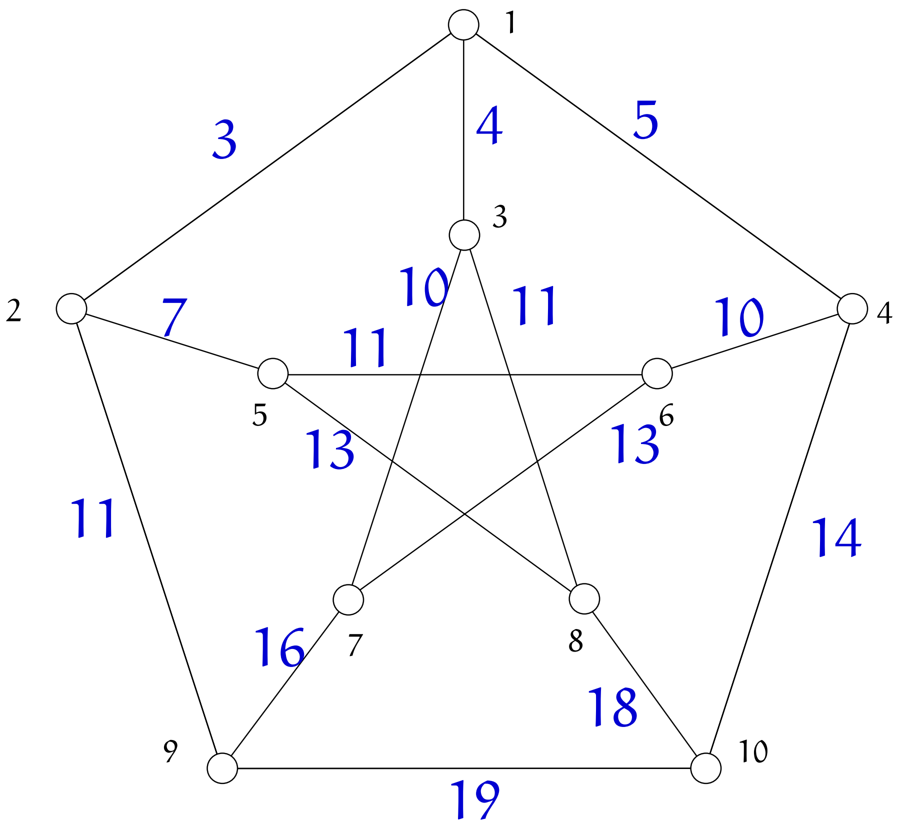
1 т. **а)** Намерете минимално покриващо дърво на G .

1 т. **б)** Какво бихте казали за същата задача, ако е зададена друга тегловна функция w

$$\forall (u, v) \in E : w(u, v) = 2u + v$$

Решение:

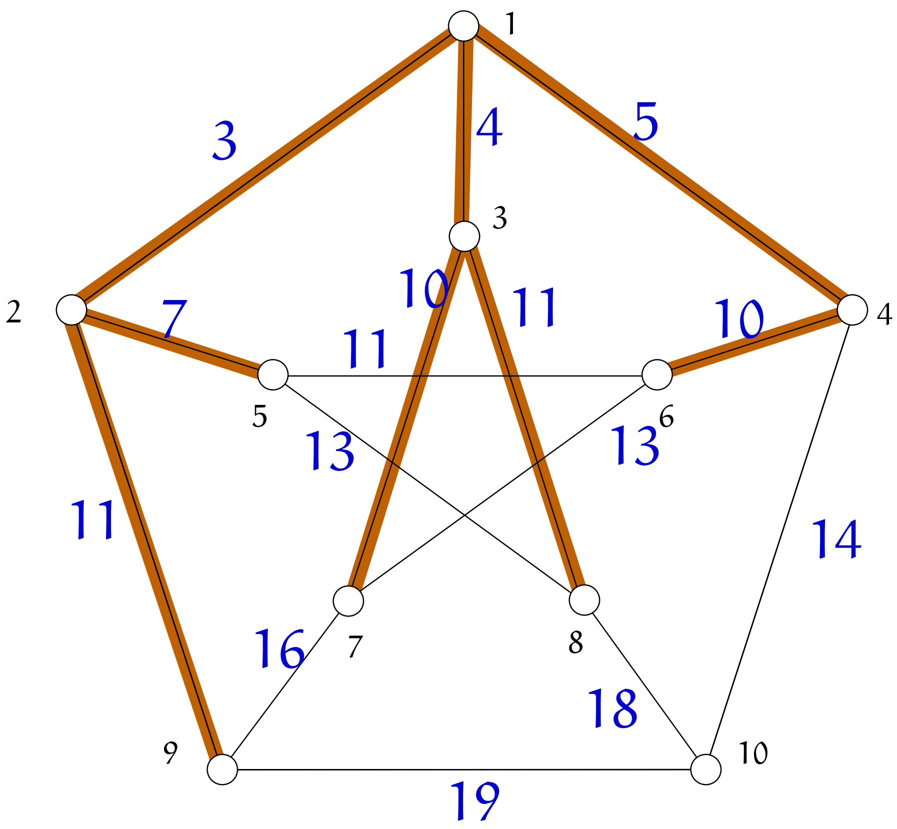
а) Първо да пресметнем теглата:



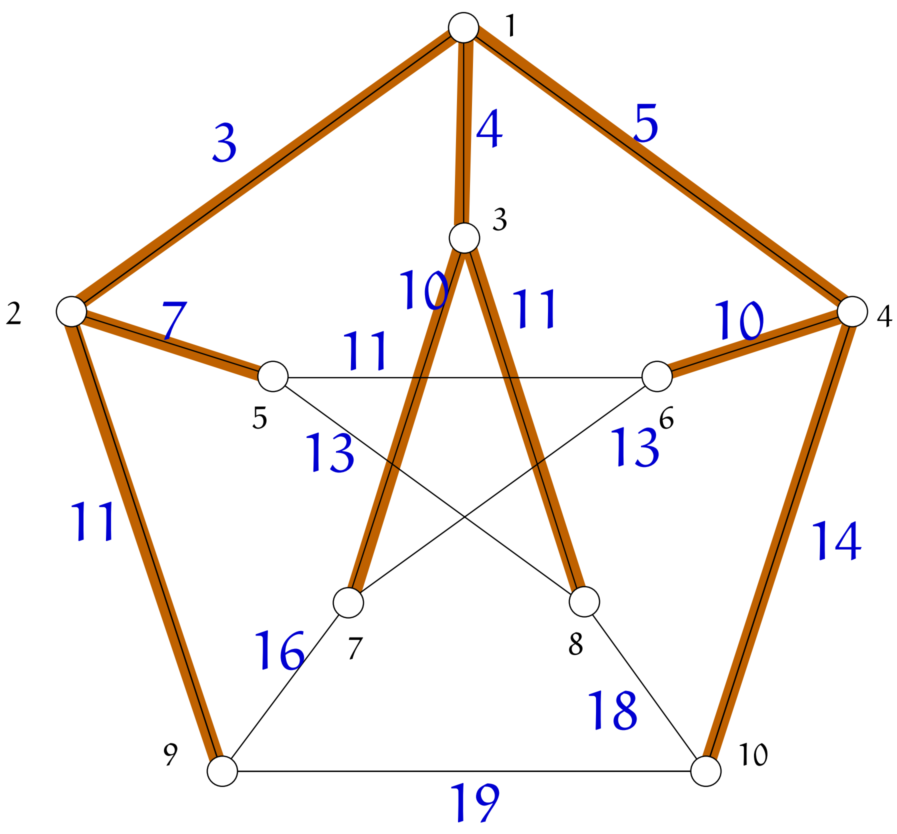
Използваме кой да е от известните ни алгоритми, примерно алгоритъма на Крускал. Сортирана последователност от ребрата е, примерно:

$$(1,2),(1,3),(1,4),(2,5),(3,7),(4,6),(2,9),(3,8),(5,6),(5,8),(6,7),(4,10),(7,9),(8,10),(9,10)$$

Слагаме ребрата от $(1, 2)$ до $(3, 8)$ без да прескачаме никое:



Прескачаме $(5, 6)$, $(5, 8)$ и $(6, 7)$ и слагаме $(4, 10)$:



с което дървото покрива целия граф и приключваме.

б) Функцията w не може да бъде тегловна функция, понеже не е симетрична по отношение на аргументите си (не е изпълнено $w(u, v) = w(v, u)$ винаги), а номерата на върховете са различни.

Следната задача е бонус. Ако не я решите, не губите нищо. Ако я решите, имате 8 точки бонус. Решение с "груба сила", тоест систематично изброяване на всички възможни конфигурации, не се приема. Решение без солидна аргументация също не се приема.

Зад. 6: *Балансиран битов вектор* е такъв, в който броя на нулите е равен на броя на единиците. Разгледайте следния балансиран битов вектор:

`0 1 1 1 0 1 0 0`

Нека това е кръгова наредба, тоест мислете си, че тези битове в този ред са написани равномерно в посока на часовниковата стрелка върху окръжност, която можем да въртим произволно около центъра:

```
        0
    0       1

  0           1


    1       1
        0
```

Тази наредба има свойството, че множеството от всички осем подвектори с дължина 3 са точно осемте различни битови вектори с дължина 3. Иначе казано, ако "извлачим" един прозорец с дължина 3 по цялата наредба, в него ще видим всички възможни вектори от 3 бита, всеки от тях точно един път:

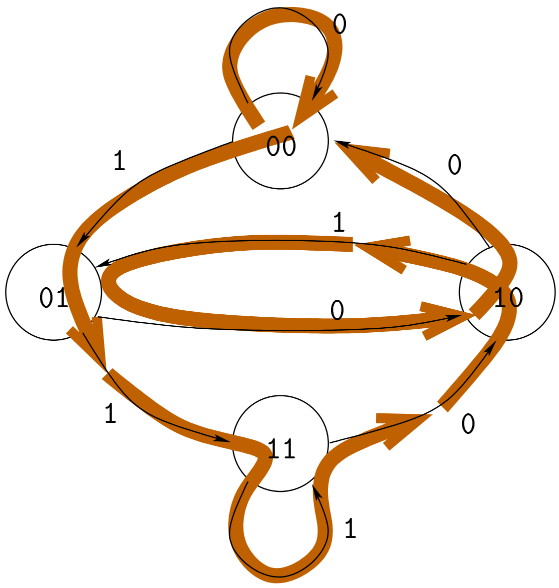
0	1	1	1	0	1	0	0	011
0	1	1	1	0	1	0	0	111
0	1	1	1	0	1	0	0	110
0	1	1	1	0	1	0	0	101
0	1	1	1	0	1	0	0	010
0	1	1	1	0	1	0	0	100
0	1	1	1	0	1	0	0	000
0	1	1	1	0	1	0	0	001

Конструирайте аналогична балансирана кръгова наредба от 16 бита, в която, ако влачим прозорец с дължина 4, да видим всички битови вектори с дължина 4, всеки от тях точно един път.

Решение: Такава балансирана кръгова наредба се нарича *редица на De Bruijn*, на английски *De Bruijn sequence*. Числото n, такова че дължината е 2^n, се нарича *порядък* на редицата. Всяка редица на De Bruijn от порядък n отговаря на Ойлеров цикъл в един определен ориентиран граф с 2^{n-1} върха. Примерно, зададената редица

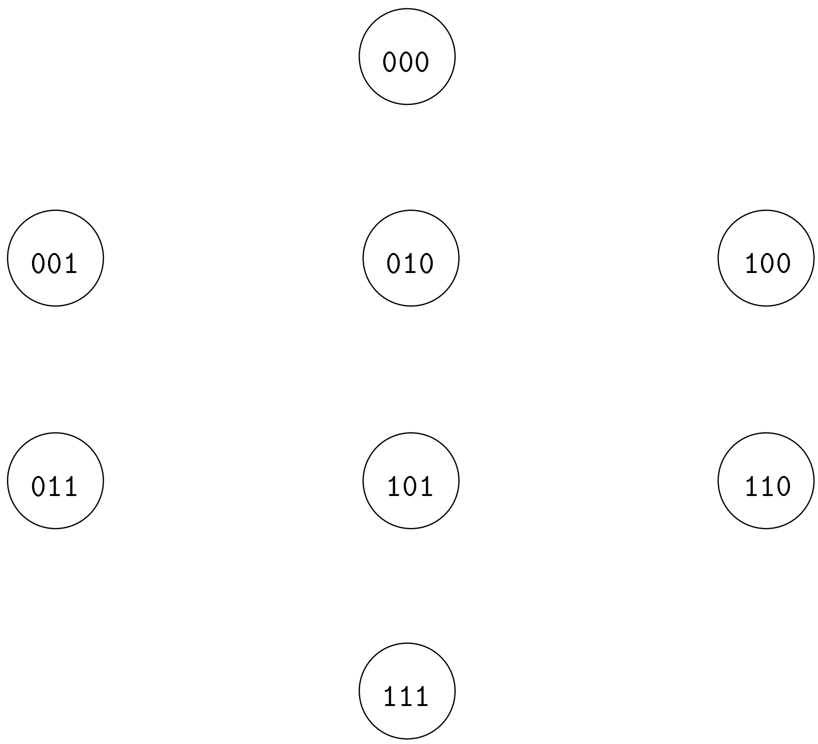
`0 1 1 1 0 1 0 0`

отговаря на Ойлеров цикъл в следния граф (графът е в черно, Ойлеровият цикъл е отбелязан с дебела кафява линия):

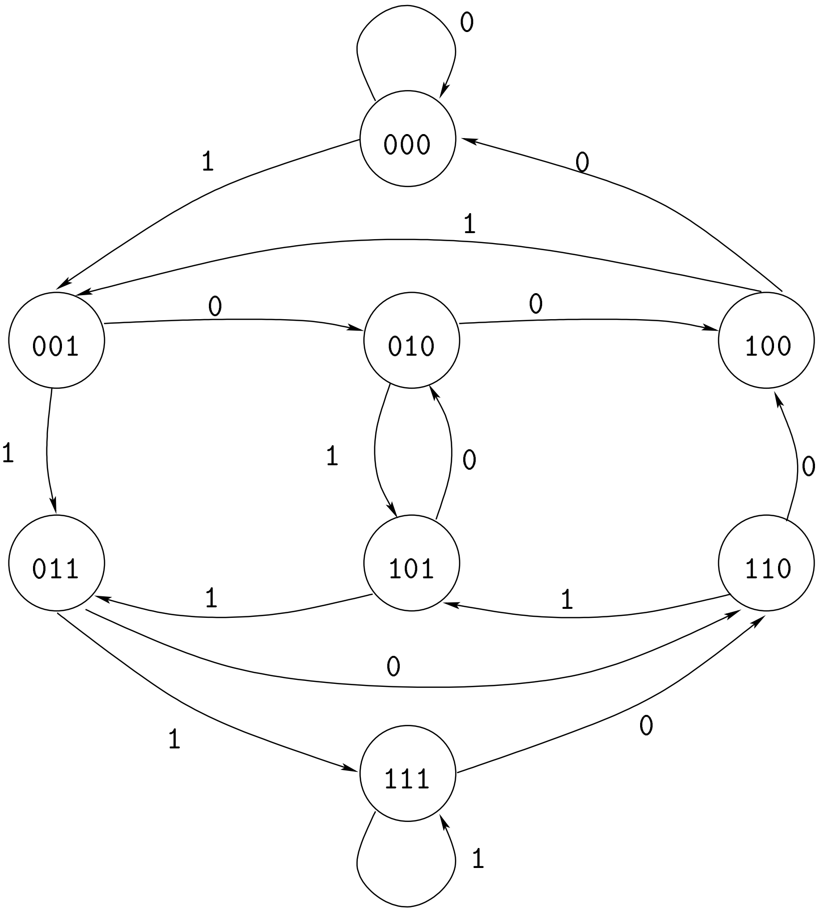


Всеки връх на графа е именуван с точно един от битовите вектори с дължина $n-1$, в случая $n-1=2$. От всеки връх излизат точно две ребра, едното именувано с 1, другото с 0. Имената на върховете са суфиксите с дължина $n-1$, тоест последните $n-1$ символа от досега видяните (видяни в редицата на De Bruijn, съответно прочетени по ребрата от Ойлеровия цикъл). От всеки връх с всяко от двете ребра отиваме точно в този връх, чието име се получава като нов суфикс с дължина $n-1$, ако към старото име (върхът, от който тръгнахме) добавим името на реброто, по което минахме. Примерно, от връх 00 отиваме във връх 01 с ребро, маркирано с 1. Редицата се получава, като просто записваме имената на ребрата в реда им в Ойлеровия цикъл. Имената на върховете служат, за да се построи графът.

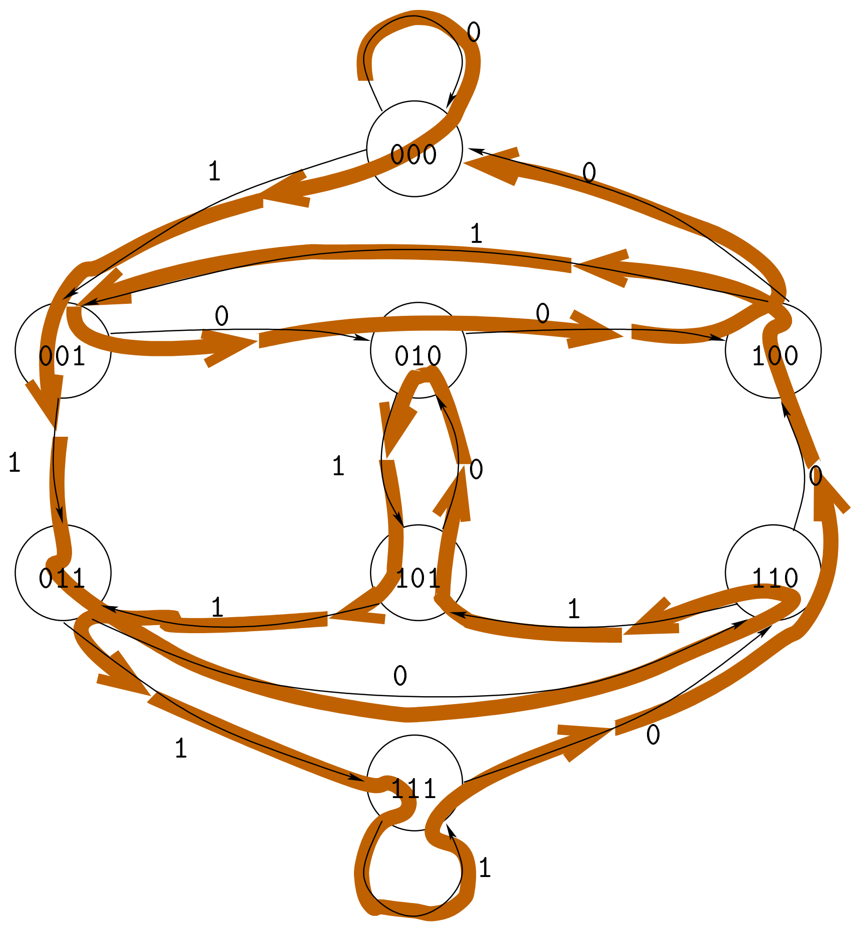
За $n=4$ започваме с $2^{4-1}=8$ върха, именувани с 000 до 111 и разположени подходящо:



За всеки връх u строим двете излизащи ребра и ги свързваме така, че ако към името на u добавим името на реброто вдясно и махнем най-левия бит, се получава името на върха, към който е насочено реброто:



Всеки Ойлеров цикъл в този граф е решение на задачата. Примерно,



който отговаря на следната редица на De Bruijn:

`0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 0 1 0 0 0`