

## ТЕМА: ХИПЕРКУБОВЕ И БУЛЕВИ ФУНКЦИИ

---

С термина *булева оценка* в контекста на теорията на булевите функции означаваме всяко конкретно “раздаване” на стойност 0 или 1 на всяка от булевите променливи, които разглеждаме. Очевидно има  $2^n$  булеви оценки при дадени  $n$  променливи.

**Зад. 1:** Нека  $V^n$  е  $n$ -мерният хиперкуб, разглеждан като неориентиран граф. Нека  $A$  е подмножество от върховете на  $V^n$ , такова че  $|A| > 2^{n-1}$ . Нека  $H$  е подграфът на  $V^n$  индуциран от  $A$ . Докажете, че  $H$  има поне  $n$  ребра.

**Зад. 2:** В тази задача описваме булевите функции на  $n$  променливи като вектори с дължини  $2^n$  при стандартното допускане, че  $k$ -ият елемент на вектора, за  $0 \leq k \leq 2^n - 1$ , е стойността на функцията върху тази булева оценка, която е записът на  $k$  в двоична позиционна бройна система. Нека  $f = (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1)$ ,  $g = (0, 1, 1, 1)$  и  $h = (0, 0, 0, 1)$  са булеви функции. Напишете композициите  $f(g(u, v), y, z)$ ,  $g(h(u, z), z)$  и  $f(g(u, v), g(u, v), g(h(u, z), h(u, z)))$ .

**Зад. 3:** Намерете Съвършената Дизюнктивна Нормална Форма (СъвДНФ) на всяка от трите композиции, които намерихте в предишната задача.

**Зад. 4:** Във всяка булева функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , за всяко  $i$ , такова че  $1 \leq i \leq n$ ,  $x_i$  се нарича *фиктивна променлива* тогава и само тогава, когато за всяка булева оценка на останалите променливи  $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ , функцията има една и съща стойност при  $x_i = 0$  и при  $x_i = 1$ . Примерно, във функциите константа-нула и константа-единица, всички променливи са фиктивни, а във функцията на две променливи  $(0, 0, 1, 1)$ , променливата  $x_2$  е фиктивна. Променлива, която не е фиктивна, се нарича съществена. Колко булеви функции на  $n$  променливи нямат фиктивни променливи?