Дискретни структури, I курс, I поток, сп. Компютърни науки

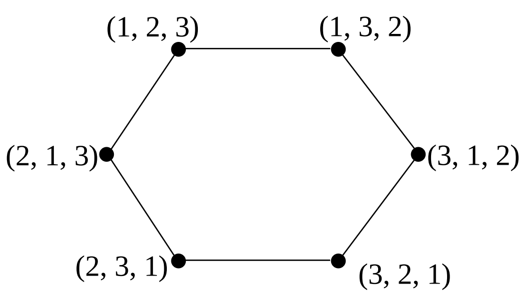
Домашно № 3, ГРАФИ
РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

Задача 1: (20 т.) В неориентирания граф $G(P_n, E)$, P_n е множеството на пермутациите на $\{1, 2, \ldots, n\}$, а $E = \{(\alpha,\beta) \mid \alpha,\beta \in P_n$ и α се получава от β с размяна на местата на два съседни в пермутацията елемента$\}$.
а) начертайте диаграмата на $G(P_3, E)$; б) докажете, че $G(P_n, E)$ е регулярен и намерете степента му на регулярност; в) докажете, че $G(P_n, E)$ е свързан.

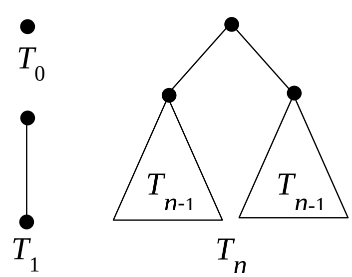
Решение: а) (4 т.) диаграмата на $G(P_3, E)$ е показана на Фиг. А;

б) (6 т.) всеки връх на графа е пермутация на $\{1, 2, \ldots, n\}$ и негови съседи са всички пермутации, които могат да се получат от разместване на два съседни върха. Очевидно е, че която и да е пермутацията, броят d на възможните размествания е един и същ – първият елемент с втория, вторят – с третият, и т. н. Значи $d = n - 1$ и всеки $G(P_n, E)$ е регулярен от степен $n - 1$.

в) (10 т.) за да докажем, че графът $G(P_n, E)$ е свързан трябва, за произволни пермутации α и $\beta \in P_n$, да докажем, че има път от α до β. Да разгледаме само α и идентичната пермутация $\iota = (1, 2, \ldots, n)$. За да има път от α до ι, трябва, като започнем от α и, като разместваме само съседни елементи, да стигнем до ι. Но това, със сигурност, можем да направим с някой алгоритъм за сортиране, например с алгоритъма bubble_sort. Аналогично можем да намерим път от β до ι, като сортираме β до ι. Но заради симетричността на релацията „има път от ... до ...“ , щом има път от β до ι, значи има път и от ι до β. Тогава от транзитивността на същата релация следва, че има път и от α до β. Следователно графът е $G(P_n, E)$ свързан.



Фиг. А



Фиг. 1

Задача 2: (20 т.) На Фиг. 1 рекурентно е дефинирана безкрайната редица от коренови дървета $T_0\ (V_0, E_0)$, $T_1(V_1, E_1)$, …, $T_n(V_n, E_n)$,… Намерете формули за броя на върховете и броя на ребрата на $T_n(V_n, E_n)$.

Решение: За броят на върховете на рекурентно дефинирана редица от коренови дървета е естествено да напишем рекурентно отношение. Забележете обаче, че стойността $|V_0|$ не може да е част от рекурентно дефинираната редица, защото $|V_1| \neq 2.|V_0| + 1$. Тъй като $|V_n|$ зависи само от $|V_{n-1}|$ разглеждаме рекурентното отношение от първи ред:

$$|V_n| = \begin{cases} 2, & \text{ако } n = 1 \\ 2.|V_{n-1}| + 1, & \text{ако } n \geq 2 \end{cases}.$$

Да решим това рекурентно отношение. От хомогенната част получаваме характеристичното уравнение $x - 2 = 0$, с корен x_1= 2. Нехомогенната част, представена като $1 = 1^n.1$, ни дава еднократен (тъй като 1 е полином от нулева степен) корен x_2= 1. Следователно решението на рекурентното уравнение е от вида $|V_n| = c_1 2^n + c_2 1^n$. От зададената стойност $|V_1| = 2$ и пресметнатата от рекурентното отношение $|V_2| = 2.|V_1| + 1 = 5$, получаваме две линейни уравнения за неизвестните коефициенти c_1 и c_2:

$$\left| \begin{array}{l} V_1 = 2 = c_1 2^1 + c_2 1^1 \\ V_2 = 5 = c_1 2^2 + c_2 1^2 \end{array} \right.$$

или

$$\left| \begin{array}{l} 2 = 2c_1 + c_2 \\ 5 = 4c_1 + c_2 \end{array} \right.$$

от където $c_1 = 3/2$ и $c_2 = -1$. Следователно

$$|V_n| = \begin{cases} 1, & \text{ако } n = 0 \\ 3.2^{n-1} - 1, & \text{ако } n \geq 1 \end{cases}.$$

За намирането на броя на ребрата можем да постъпим по същия начин, но не си струва усилията, след като имаме теорема, че за всяко дърво $|V_n| = |E_n|$+1. Прилагайки теоремата получаваме

$$|\mathrm{E}_n| = \begin{cases} 0, & \text{ако } n = 0 \\ 3.2^{n-1} - 2, & \text{ако } n \geq 1 \end{cases}.$$

Задача 3: (40 т.) На Фиг. 2 е даден краен неориентиран свързан граф *G*(*V*, *E*) (за нуждите на подзадачи 3в, 3г и 3д, по ребрата му е дефинирана ценова функция с положителни стойности).

а) постройте покриващо дърво „в ширина“ на *G* с начален връх *a;*

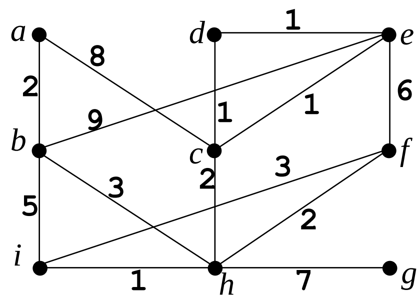
б) постройте покриващо дърво „в дълбочина“ на *G* с начален връх *a*. Направете списък на върховете на *G* в реда, по който са влизали в стека;

в) постройте МПД на G с алгоритъма на Прим, с начален връх *a*. Направете списък на върховете на *G* в реда, по който са влизали в дървото;

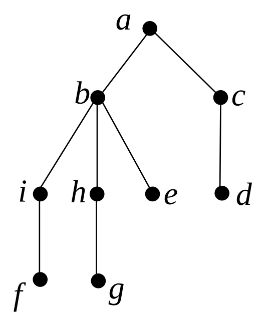
г) постройте МПД на G с алгоритъма на Крускал. Покажете сортираният списък на ребрата, който сте използвали в алгоритъма;

д) постройте дърво на най-къси пътища в *G* от върха *a* до всички останали върхове с алгоритъма на Дейкстра.

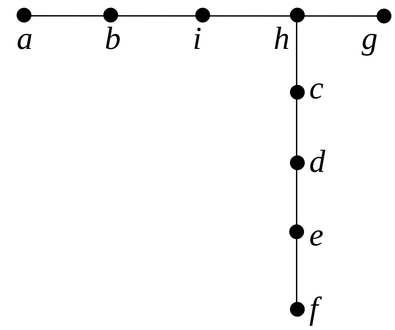
<u>Решение:</u> а) (7 т.) На Фиг. B е показано едно възможно ПД на *G*, построено в ширина, с начален връх *a*;



Фиг. 2



Фиг. B



Фиг. C

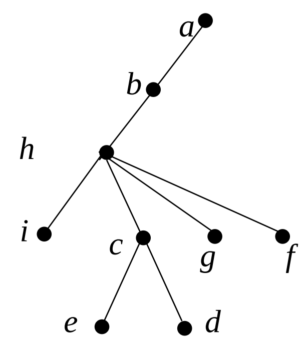
б) (7 т.) На Фиг. C е е показано едно възможно ПД на *G*, построено в дълбочина, с начален връх *a.* Върховете са влизали в дървото в следния ред (*a, b, i, h, g, c, d, e, f*);

в) (8 т.) На Фиг. D е е показано едно възможно минимално ПД на *G*, построено с алгоритъма на Прим, с начален връх *a.* Върховете са влизали в дървото в следния ред (*a, b, h, i, c, d, e, f, g*);

г) (8 т.) Ако приложим алгоритъма на Крускал, при следното сортиране на ребрата в нарастващ ред на дължините им:

(*c*, *d*), (*d*, *e*), ~~(*c*, *e*)~~, (*i*, *h*), (*a*, *b*), (*c*, *h*), (*h*, *f*),
~~(*i*, *f*)~~, (*b*, *h*), ~~(*b*, *i*)~~, ~~(*e*, *f*)~~, (*h*, *g*), ~~(*a*, *c*)~~, ~~(*b*, *e*)~~,

тогава в минималното ПД на *G* ще влязат незадрасканите в редицата ребра;



Фиг. D

д) (10 т.) При прилагане на алгоритъма на Дейкстра към графа *G*, измененията в стойностите на двата масива са показани в следната таблица (последните три стъпки на алгоритъма не са показани, тъй като не променят нищо):

U={	***b***	***c***	***d***	***e***	***f***	***g***	***h***	***i***
a	**2**	8	∞	∞	∞	∞	∞	∞
b		8	∞	11	∞	∞	**5**	7
h		7	∞	11	7	12		**6**
i		**7**	∞	11	7	12		
c…			8	8	**7**	12		

b	***c***	***d***	***e***	***f***	***g***	***h***	***i***
a	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*
	a	*a*	*b*	*a*	*a*	*b*	*b*
	h	*a*	*b*	*h*	*h*		*h*
	h	*a*	*b*	*h*	*h*		
		c	*c*	*h*	*h*		

Търсеното дърво на най-късите пътища в случая съвпада с минималното ПД от Фиг. D.

Задача 4: (20 т.) В неориентирания граф $B_n(\{0,1\}^n, E)$ (наричан още n-мерен булев куб), върхове са n-мерните двоични вектори, а $E = \{(\alpha,\beta) \mid \alpha,\beta \in \{0,1\}^n$, α се различава от β в точно 1 позиция$\}$.

а) намерете броя на k-мерните подкубове на B_n, съдържащи зададен връх α, $0 \leq k < n$;

б) намерете броя на k-мерните подкубове на B_n, съдържащи зададено ребро (α,β), $0 \leq k < n$.

Решение: а) (9 т.) При зададено k, един k-мерен подкуб се състои от всички 2^k вектора, които имат едни и същи стойности в избрани $n - k$ позиции, да наречем тези позиции *фиксирани*, а останалите k позиции, да ги наречем *променящи се*, се менят по всички възможни начини. За да може зададен връх α да принадлежи на k-мерен подкуб, фиксираните позиции на подкуба трябва да са избрани така, че да съвпадат със съответните стойности на α. Значи k-мерен подкуб, съдържащ зададения връх α получаваме, като изберем в α по произволен начин k позиции за променящи се, а останалите фиксираме така както са в α. Следователно броят на k-мерните подкубове на B_n, съдържащи зададен връх α са $\binom{n}{k}$.

б) (11 т.) Нека (α,β) е ребро и нека позицията, в която α и β се различават, е i-тата. Както и в решението на подзадача а), за да може подкубът да съдържа и α, и β, трябва всичките му фиксирани позиции да са измежду фиксираните позиции на α и β, а това означава, че i-тата позиция непременно е измежду променящите се. Значи k-мерен подкуб, съдържащ зададено ребро (α,β) получаваме, като изберем в α по произволен начин $k - 1$ позиции измежду различните от i за променящи се, добавим към тях i-тата позиция за k-та променяща се, а останалите $n - k$ позиции фиксираме така, както са в α и β. Следователно, броят на k-мерните подкубове на B_n, съдържащи зададено ребро (α,β) са $\binom{n-1}{k-1}$.