Задача 26 (Китай, 1996). Нека n е цяло положително число. Намерете броя на полиномите $P(x)$ с коефициенти от $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$, за които $P(2) = n$.

Първо решение: Нека $S = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ и нека

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0\ ,$$

където $a_i \in S$. Тогава по условие имаме, че

$$P(2) = 2^m a_m + 2^{m-1}a_{m-1} + \cdots + 2a_1 + a_0.$$

Опитваме се да намерим броя на редиците $(a_0,\ a_1, \ldots)$, за които всяко $a_i \in S$ и

$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} 2^i a_i = \sum_{i=0}^{\infty} b_i = n$$

Разглеждаме следната пораждаща функция:

$$\begin{aligned} f(x) = {} & (1 + x + x^2 + x^3)(1 + x^2 + x^4 + x^6) \\ & (1 + x^4 + x^8 + x^{12})(1 + x^8 + x^{16} + x^{24}) \ldots , \end{aligned}$$

където $1 + x + x^2 + x^3$ представлява различните възможности за избор на b_0,
$1 + x^2 + x^4 + x^6$ представлява различните възможности за избор на b_1,
$1 + x^4 + x^8 + x^{12}$ представлява различните възможности за избор на b_2 и т.н.

Достатъчно е да намерим коефициента пред x^n във $f(x)$. Забележете, че

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^4-1}{x-1}\cdot\frac{x^8-1}{x^2-1}\cdot\frac{x^{16}-1}{x^4-1}\cdot\frac{x^{32}-1}{x^8-1}\cdots \\ &= \frac{1}{(x-1)(x^2-1)}\ , \end{aligned}$$

тъй като всеки член в числителя се среща в знаменателя на дробта на разстояние два члена. Разделяме получения израз на прости дроби чрез познатия ни метод със сравняване на коефициенти и получаваме, че

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2} \\ &= \frac{-2}{4(x^2-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2} = \frac{1}{2}\left((x-1)^{-2} + \frac{1}{1-x^2}\right). \end{aligned}$$

Двете функции, които получихме след последното равенство, вече са удобни за развиване в степенен ред и намираме, че

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \binom{-2}{1}x + \binom{-2}{2}x^2 - \cdots\right) + \left(1 + x^2 + x^4 + \cdots\right)\right].$$

Тъй като $\binom{-2}{n} = \dfrac{(-2)(-3)\cdots(-2-n+1)}{n!} = (-1)^n(n+1)$, то получаваме, че

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\left[\left(1+2x+3x^2+\cdots\right)+\left(1+x^2+x^4+\cdots\right)\right] \\ &= 1+x+2x^2+2x^3+3x^4+3x^5+\cdots \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor+1\right)x^m. \end{aligned}$$

Следователно коефициента пред x^n е $\lfloor n/2\rfloor + 1$, което означава, че толкова са и полиномите, които изпълняват условията на задачата.

$\square$

Второ решение: Ще решим по-общата задача: Нека m и n са положителни цели числа и $m \geq 2$. Намерете броя на полиномите $P(x)$ с коефициенти от $\{0, 1, 2, \ldots, m^2-1\}$, за които $P(m) = n$. Ще наричаме тези полиноми *добри.*

Нека $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, където $a_k \in \{0, 1, 2, \ldots, m^2-1\}$ за $k = 0, 1, 2, \ldots$. Тогава всяко a_k може да бъде записано във вида $b_k m + c_k$, където $b_k, c_k \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$. Следователно

$$n = P(m) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k m^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k m^k = mt + \sum_{k=0}^{\infty} c_k m^k,$$

където $t = \sum_{k=0}^{\infty} b_k m^k$.

За всяко t, $0 \leq t \leq \lfloor n/m \rfloor$, има единствен начин, по който може да бъде записано във вида $t = \sum_{k=0}^{\infty} b_k m^k$ с $b_k \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$. (Доказхме го на първата лекция в частния случай за единствен запис на число в десетична бройна система. Тук е същото, само че записът на t е в m-ична бройна система.) Има единствен начин да запишем $n - mt = \sum_{k=0}^{\infty} c_k m^k$, където $c_k \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ ($n - mt$ в бройна система с основа m). Следователно намерихме **биекция** между множеството $\{0, 1, \ldots, \lfloor n/m \rfloor\}$ и множеството от *добрите* полиноми. Откъдето следва, че има точно $\lfloor n/m \rfloor + 1$ *добри* полинома.
За нашата задача имаме, че $m = 2$, следователно има точно $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ полинома, които изпълняват условията на задачата.

$\square$