Решение на домашно №4 по Дискр. Структрури за II поток КН, зимен семестър 2012/2013 г.

Зад. 1: Нека B^n е n-мерният хиперкуб, разглеждан като неориентиран граф. Нека A е подмножество от върховете на B^n, такова че $|A| > 2^{n-1}$. Нека H е подграфът на B^n индуциран от A. Докажете, че H има поне n ребра.

Решение: Ще използваме нотацията "$\{\ \ \}_M$" за мултимножества, примерно $\{1, 2, 2, 3, 3, 3\}_M$. Множеството от върховете на B^n са всички булеви вектори с дължина n. Нека $m = |A|$ и $A = \{\widetilde{\alpha_1}, \widetilde{\alpha_2}, \ldots, \widetilde{\alpha_m}\}$. Нека $\widetilde{\alpha_i} = \left(\alpha_i^1, \alpha_i^2, \ldots, \alpha_i^n\right)$ за $1 \leq i \leq m$, където $\alpha_i^j \in \{0, 1\}$ за $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq j \leq n$. За всяко k, такова че $1 \leq k \leq n$, дефинираме k-*тата контракция на* A да бъде мултимножеството от m вектора, получени от A след изтриването на k-ия елемент на всеки вектор. Ще означаваме k-тата контракция на A чрез "$A|_k$". Формално, $A|_k = \{\widetilde{\alpha_1}|_k, \widetilde{\alpha_2}|_k, \ldots, \widetilde{\alpha_m}|_k\}_M$ където

$$\widetilde{\alpha_i}|_k = \left(\alpha_i^1, \alpha_i^2, \ldots, \alpha_i^{k-1}, \alpha_i^{k+1}, \ldots, \alpha_i^n\right) \text{ for } 1 \leq i \leq m.$$

Очевидно за всяко k, всеки вектор от $A|_k$ има дължина $n - 1$. Ключовото наблюдение е, че може да има най-много 2^{n-1} различни булеви вектора с дължина $n - 1$. Но по конструкция $A|_k$ има $m > 2^{n-1}$ вектора. Съгласно принципа на Дирихле в $A|_k$ има поне два еднакви вектора. Нека за всяко k, $\widetilde{\alpha_{p_k}}|_k$ и $\widetilde{\alpha_{q_k}}|_k$ са произволни еднакви вектори от $A|_k$. Без ограничение на общността, нека индексите p_k и q_k са такива, че $1 \leq p_k < q_k \leq m$. Индексите на свой ред са индексирани с k защото зависят от k – за различни стойности на k те са различни.

Забележете, че A не е мултимножество, а нормално множество, което означава, че в него няма повтарящи се елементи. Следователно същите вектори *преди* контракцията са били различни, тоест $\widetilde{\alpha_{p_k}} \neq \widetilde{\alpha_{q_k}}$. Оттук следва, че $\widetilde{\alpha_{p_k}}|_k$ и $\widetilde{\alpha_{q_k}}|_k$ могат да се различават единствено в k-тата позиция. Тъй като те се различават в поне една позиция, следва, че се различават точно в k-тата позиция. Доказахме, че за всяко k съществува ребро $e_k = (\widetilde{\alpha_{p_k}}, \widetilde{\alpha_{q_k}})$, както в целия хипуркуб B^n, така и в индуцирания подграф H.

Сега ще докажем, че за всеки две различни стойности на k, да речем s и t, ребрата e_s и e_t са различни. Да допуснем противното, а именно:

$$(\widetilde{\alpha_{p_s}}, \widetilde{\alpha_{q_s}}) = (\widetilde{\alpha_{p_t}}, \widetilde{\alpha_{q_t}}) \text{ за някои } s, t, \text{ такива че } 1 \leq s < t \leq n \tag{1}$$

Да си припомним, че $\widetilde{\alpha_{p_s}}$ and $\widetilde{\alpha_{q_s}}$ се различават в точно една позиция, а именно s-тата позиция. Следователно,

$$\widetilde{\alpha_{p_s}} = \beta_s, 0, \gamma_s \text{ и} \tag{2}$$
$$\widetilde{\alpha_{q_s}} = \beta_s, 1, \gamma_s \tag{3}$$

или

$$\widetilde{\alpha_{p_s}} = \beta_s, 1, \gamma_s \text{ и} \tag{4}$$
$$\widetilde{\alpha_{q_s}} = \beta_s, 0, \gamma_s \tag{5}$$

където β_s и γ_s са булеви вектори, такива че $|\beta_s| = s-1$ и $|\beta_s|+|\gamma_s| = n-1$. Аналогично,

$$\widetilde{\alpha_{p_t}} = \beta_t, 0, \gamma_t \text{ и}$$
$$\widetilde{\alpha_{q_t}} = \beta_t, 1, \gamma_t$$

или

$$\widetilde{\alpha_{p_t}} = \beta_t, 1, \gamma_t \text{ и}$$
$$\widetilde{\alpha_{q_t}} = \beta_t, 0, \gamma_t$$

където β_t и γ_t са булеви вектори, такива че $|\beta_t| = t-1$ и $|\beta_t|+|\gamma_t| = n-1$. Тъй като $s < t$, в сила е $|\beta_s| < |\beta_t|$, което означава, че β_t съдържа β_s като същински префикс:

$$\beta_t = \underbrace{\underbrace{\beta_s}_{\text{дължина } s-1}, \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\text{дължина } t-s}}_{\text{дължина } t-1}$$

Съгласно допускането (1), $\widetilde{\alpha_{p_s}} = \widetilde{\alpha_{p_t}}$. Както вече забелязахме, или (2) и (3) са в сила, или (4) и (5) са в сила. Ако (2) и (3) са в сила, то

$$\beta_t = \beta_s, 0, \ldots \text{ заради (2)} \tag{6}$$

и

$$\beta_t = \beta_s, 1, \ldots \text{ заради (3)} \tag{7}$$

Тъй като не може елементът на позиция s да бъде едновременно 0 и 1, това е невъзможно. Ако (4) и (5) са в сила, то

$$\beta_t = \beta_s, 1, \ldots \text{ заради (4)} \tag{8}$$

и

$$\beta_t = \beta_s, 0, \ldots \text{ заради (5)} \tag{9}$$

Отново изведохме, че елементът на позиция s е едновременно 0 и 1. Получавайки противоречие във всички възможни случаи след допускане (1), виждаме, че (1) трябва да е невярно.

Доказахме, че за всяко k, такова че $1 \leq k \leq n$, съществува поне едно ребро e_k както в B^n, така и в H, и освен това тези ребра са две по две различни. Следователно, H има поне n ребра. $\square$

Зад. 2: В тази задача описваме булевите функции на n променливи като вектори с дължини 2^n при стандартното допускане, че k-ият елемент на вектора, за $0 \leq k \leq 2^n - 1$, е стойността на функцията върху тази булева оценка, която е записът на k в двоична позиционна бройна система. Нека $f = (0,1,0,1,0,0,0,1)$, $g = (0,1,1,1)$ и $h = (0,0,0,1)$ са булеви функции. Напишете композициите $f(g(u,v),y,z)$, $g(h(u,z),z)$ и $f(g(u,v),g(u,v),g(h(u,z),h(u,z)))$.

Решение: Ако напишем подробно описанието на трите функции—без да даваме имена на променливите, това засега не е съществено—то е:

			f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

		g
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

		h
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Да разгледаме композицията $f(g(u, v), y, z)$. Има участващи променливи 4, следователно трябва да дефинираме функция на 4 променливи, тоест вектор с 16 елемента. Ето само булевите оценки на входните променливи:

y	z	u	v
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

За всяка булева оценка пресмятаме стойността на $g(u, v)$. При това игнорираме стойностите на y и z. Ето:

y	z	u	v	$g(u,v)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

След това за всяка булева оценка пресмятаме стойността на композицията $f(g(u,v),y,z)$, като използваме само колоните на y, z и $g(u,v)$, игнорирайки колоните на u и v:

y	z	u	v	$g(u,v)$	$f(g(u,v),y,z)$
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1

В композицията $g(h(u,z),z)$ има 2 участващи променливи, следователно трябва да дефинираме вектор с 4 елемента:

u	z	$h(u,z)$	$g(h(u,z),z)$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

В композицията $f(g(u,v),g(u,v),g(h(u,z),h(u,z)))$ има 3 участващи променливи, следователно трябва да дефинираме вектор с 8 елемента:

u	v	z	$g(u,v)$	$h(u,z)$	$g(h(u,z),h(u,z))$	$f(g(u,v),g(u,v),g(h(u,z),h(u,z)))$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

□

Зад. 3: Намерете Съвършената Дизюнктивна Нормална Форма (СъвДНФ) на всяка от трите композиции, които намерихте в предишната задача.

Решение: На $f(g(u,v),y,z)$ СъвДНФ е

$$\overline{y}\,z\,\overline{u}\,\overline{v} \vee y\,z\,\overline{u}\,\overline{v} \vee y\,z\,\overline{u}\,v \vee y\,z\,u\,\overline{v} \vee y\,z\,u\,v$$

На $g(h(u,z),z)$ СъвДНФ е

$$\overline{u}\,z \vee u\,z$$

На $f(g(u,v),g(u,v),g(h(u,z),h(u,z)))$ СъвДНФ е

$$u\,\overline{v}\,z \vee u\,v\,z$$

□

Зад. 4: Във всяка булева функция $f(x_1,,x_2,\ldots,x_n)$, за всяко i, такова че $1 \leq i \leq n$, x_i се нарича *фиктивна променлива* тогава и само тогава, когато за всяка булева оценка на <u>останалите</u> променливи x_1, x_2, …, x_{i-1}, x_{i+1}, …, x_n, функцията има една и съща стойност при $x_i = 0$ и при $x_i = 1$. Примерно, във функциите константа-нула и константа-единица, всички променливи са фиктивни, а във функцията на две променливи $(0,0,1,1)$, променливата x_2 е фиктивна. Променлива, която не е фиктивна, се нарича съществена. Колко булеви функции на n променливи нямат фиктивни променливи?

Решение: Всички булеви функции на n променливи са 2^{2^n}. Функциите, в които x_1 е фиктивна (може да има и други фиктивни променливи), са $2^{\frac{1}{2}2^n}$, тъй като всички 2^n булеви оценки се групират по двойки по такъв начин, че за двете булеви оценки от всяка двойка стойността на функцията е една и съща. Групирането е следното: булевата оценка $0,0,\ldots,0$ се групира с $1,0,\ldots,0$, булевата оценка $0,0,\ldots,0,1$ се групира с $1,0,\ldots,0,1$, и така нататък. Броят на тези групи е $\frac{1}{2}2^n$ и оттук извеждаме $2^{\frac{1}{2}2^n} = 2^{2^{n-1}}$ за броя на функциите. Нека A_i е множеството функции, в които x_i е фиктивна (което не означава, че няма други фиктивни променливи), за $1 \leq i \leq n$. Очевидно $|A_i| = |A_j|$ за всички i и j $(1 \leq i < j \leq n)$, така че $|A_i| = 2^{2^{n-1}}$ за всички i. Обаче тези множества имат непразни сечения, така че мощността на сечението им не е $n2^{2^{n-1}}$, а е по-малко.

Правилният отговор се получава чрез комбинаторния принцип на включването и изключването:

$$2^{2^n} - \binom{n}{1}2^{2^{n-1}} + \binom{n}{2}2^{2^{n-2}} - \binom{n}{3}2^{2^{n-3}} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}2^{2^{n-n}} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}2^{2^{n-k}}$$

Забележете, че в последното събираемо имаме $\binom{n}{n}2^{2^{n-n}}$. Това е равно на $1 \times 2^{2^0} = 2^1 = 2$. И действително, има точно 2 функции, в които всички променливи са фиктивни. $\square$