Дискретни структури, I курс, I поток, сп. Компютърни науки

Домашно №4, БУЛЕВИ ФУНКЦИИ

<u>Задача 1:</u> (24 т.) Нека B^n е n-мерният булев куб.

a) Да се намери броят на двоичните вектори $\tilde{\alpha}^n$ от B^n такива, че за фиксирани вектори $\tilde{\beta}$ и $\tilde{\gamma}$ и $\rho(\tilde{\beta},\tilde{\gamma}) = k$ ($n \geq k \geq 1$) е изпълнено: $\tilde{\beta} \prec \tilde{\alpha} \prec \tilde{\gamma}$;

<u>Решение:</u> Тъй като $\tilde{\beta} \prec \tilde{\gamma}$ и $\rho(\tilde{\beta},\tilde{\gamma}) = k$, то видът на тези вектори е както следва: $\exists Ind = \{i_1,\ldots,i_k\} \subseteq I_n$ такова, че за $\forall j \in Ind : \beta_j = 0 \wedge \gamma_j = 1$ и за $\forall p \notin Ind : \beta_p = \gamma_p$. Условието $\tilde{\beta} \prec \tilde{\alpha} \prec \tilde{\gamma}$ се удовлетворява точно от векторите $\tilde{\alpha} : \alpha_p = \beta_p = \gamma_p, \forall p \notin Ind$ и $\alpha_j \in \{0,1\} : \forall j \in Ind$. Следователно броят на векторите, удовлетворяващи условието на задачата е 2^k.

b) Да се докаже, че всяко подмножество на B^n от поне n+2 вектора, съдържа двойка несравними вектори.

<u>Решение:</u> Нека $A \subseteq B^n, |A| = n+2$. Тъй като възможните тегла на векторите от B^n са числата от множеството J_{n+1}, то според принципа на Дирихле множеството A съдържа вектори $\tilde{\alpha}^n$ и $\tilde{\beta}^n$ с равни тегла. Ако, обаче, два вектора са с равни тегла, то те са несравними, тъй като $\exists i,j \in I_n : (\alpha_i = 0 \wedge \beta_i = 1) \wedge (\alpha_j = 1 \wedge \beta_j = 0)$.

<u>Задача 2:</u> (21 т.)Дадена е булевата функция $f(\tilde{x}^3) = (x \to (\bar{y} \oplus \bar{z})) \equiv ((x \wedge \bar{y}) | (\bar{y} \wedge z))$.

a) Да се напише таблицата на функцията $f(\tilde{x}^3)$;

<u>Решение:</u>

x	**y**	**z**	**f(x,y,z)**
0	**0**	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**1**
0	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**0**
1	**1**	**0**	**1**
1	**1**	**1**	**0**

b) Да се напише Съвършената ДНФ на функцията $f(\tilde{x}^3)$;

Решение:
СвДНФ = $\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee xy\bar{z}$

c) Да се намери полиномът на Жегалкин на $\mathbf{f(\tilde{x}^3)}$.
Решение:
ПЖ = $1 \oplus x \oplus xy \oplus xyz$

Задача 3: (20 т.) Да се намери броят на булевите функции $f(\tilde{x}^n)$ такива, че

a) $f(\tilde{x}^n)$ приема стойност 0 за всеки вектор от стойности на променливите с тегло не по-голямо от $\frac{n}{2}$, а за всеки от останалите вектори приема произволна стойност;
Решение: Ако функцията удовлетворява условието, то броят на векторите от J_2^n, за които функцията приема стойност 0, е равен на $A = \sum_{0 \le i \le n/2} \binom{n}{i}$. За всеки от останалите вектори, стойността на функцията може да бъде 0 или 1. Следователно, броят на различните функции, удовлетворяващи условието, е равен на $2^{2^n - A}$.

b) Съществува двойка противоположни вектори от стойности на променливите, за които $f(\tilde{x}^n)$ приема стойност 1.
Решение: Ще определим броя на функциите, които не удовлетворяват даденото условие и ще го извадим от броя на всички функции. Ако функцията $f(\tilde{x}^n)$ не удовлетворява условието, то за всяка двойка противоположни вектори $\tilde{\alpha}$ и $\bar{\tilde{\alpha}}$ има три възможности: $f(\tilde{\alpha}) = 0 \wedge f(\bar{\tilde{\alpha}}) = 0$, $f(\tilde{\alpha}) = 0 \wedge f(\bar{\tilde{\alpha}}) = 1$ и $f(\tilde{\alpha}) = 1 \wedge f(\bar{\tilde{\alpha}}) = 0$. Тъй като броят на наредените двойки противоположни вектори е 2^{n-1}, то броят на функциите, които не удовлетворяват условието е $3^{2^{n-1}}$. Следователно, броят на търсените функции е $2^{2^n} - 3^{2^{n-1}}$.

Задача 4: (15 т.) Да се намери дължината на Съвършената ДНФ на функцията

$$f(\tilde{x}^n) = x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_4 \oplus \ldots \oplus x_n$$

Решение: Нека $f_1(\tilde{x}^3) = x_1x_2 \oplus x_1x_3, f_2(\tilde{x}^{n-3}) = x_4 \oplus x_5 \oplus \ldots \oplus x_n$.
Да означим с $N_f = \{\tilde{\alpha} \mid \tilde{\alpha} \in J_2^n, f(\tilde{\alpha}) = 1\}$. Задачата се свежда до намиране на $|N_f|$.
Нека $\tilde{\alpha} \in J_2^n$. Тогава $f(\tilde{\alpha}) = 1 \Leftrightarrow f_1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = 0 \wedge f_2(\alpha_4,\ldots,\alpha_n) = 1$ или

$$f_1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = 1 \wedge f_2(\alpha_4,\ldots,\alpha_n) = 0$$

Следователно, $N_f = (\bar{N}_{f_1} \times N_{f_2}) \cup (N_{f_1} \times \bar{N}_{f_2})$ и

$$|N_f| = 6.2^{n-4} + 2.2^{n-4} = 8.2^{n-4} = 2^{n-1}.$$

Задача 5: (20 т.) Дадена е булевата функция

$$f(\tilde{x}^n) = a \oplus (x_1 | x_2) \oplus (x_2 | x_3) \oplus \ldots \oplus (x_{n-1} | x_n) \oplus (x_n | x_1)$$

Да се определи за какви стойности на $n \geq 2$ и параметъра $a \in \{0,1\}$ е в сила: $f(0,0,\ldots,0) = 1$, $f(1,1,\ldots,1) = 0$ и съществува двойка противоположни вектори от стойности на променливите, за които $f(\tilde{x}^n)$ приема една и съща стойност.

Решение: $f(1,1,\ldots,1) = a \oplus 0 \oplus \ldots \oplus 0 = a \Rightarrow a = 0$

$$f(0,0,\ldots,0) = 1 \oplus 1 \oplus \ldots \oplus 1 = n(mod\, 2) \Rightarrow n = 2k+1$$

За да проверим последното условие първо ще преобразуваме формулата, представяща нашата функция.

$$f(\tilde{x}^n) = (x_1 | x_2) \oplus (x_2 | x_3) \oplus \ldots \oplus (x_{n-1} | x_n) \oplus (x_n | x_1) =$$
$$= (x_1 x_2 \oplus 1) \oplus (x_2 x_3 \oplus 1) \oplus \ldots \oplus (x_{n-1} x_n \oplus 1) \oplus (x_n x_1 \oplus 1) =$$
$$= x_1 x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus \ldots \oplus x_{n-1} x_n \oplus x_n x_1 \oplus 1$$

Нека $\tilde{\alpha} \in J_2^n$ и $\overline{\tilde{\alpha}} = (\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_n)$ е неговият противоположен вектор.

$$f(\overline{\tilde{\alpha}}) = \overline{\alpha}_1 \overline{\alpha}_2 \oplus \ldots \oplus \overline{\alpha}_n \overline{\alpha}_1 \oplus 1 =$$
$$= (\alpha_1 \oplus 1)(\alpha_2 \oplus 1) \oplus \ldots \oplus (\alpha_n \oplus 1)(\alpha_1 \oplus 1) \oplus 1 =$$
$$= \alpha_1 \alpha_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_n \alpha_1 \oplus \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_1 \oplus 1 \oplus 1 =$$
$$= \alpha_1 \alpha_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_n \alpha_1 = \bar{f}(\tilde{\alpha})$$

И така, доказахме, че за произволна двойка противоположни вектори функцията приема различни стойности. Следователно, не съществуват стойности на $n \geq 2$ и параметъра $a \in \{0,1\}$, за които функцията удовлетворява условието на задачата.