Използване на пораждащи функции в задача от Националната олимпиада по математика в САЩ

Доклад по ИГКТГ

Мартин Добринов Иванов, №81602

29 април 2021 г.

Предварителни знания

Дефиниция (разбиване на естествено число)

Нека $n \in \mathbb{N}$. Разбиване на n наричаме всяка монотонно намаляваща редица от естествени числа $p_1, p_2, \dots, p_k$, такава че $n = p_1 + p_2 + \dots + p_k$.

Например разбиванията на числото $n = 5$ са:

$$\begin{aligned} 5 &= 5 \\ &= 4 + 1 \\ &= 3 + 2 \\ &= 3 + 1 + 1 \\ &= 2 + 2 + 1 \\ &= 2 + 1 + 1 + 1 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1. \end{aligned}$$

Дефиниция

Нека n е естествено число.
За всяко разбиване π на n дефинираме:

$$A(\pi) = \text{броят единици в разбиването } \pi;$$

$$B(\pi) = \text{броят различни числа в разбиването } \pi.$$

Например $A(\pi) = 2$ и $B(\pi) = 3$ за разбиването $\pi : 4 + 2 + 2 + 1 + 1$ на числото $n = 10$.

USAMO 1986, задача 5

Нека n е естествено число. Да се докаже, че сборът на $A(\pi)$ за всички разбивания π на n е равен на сбора на $B(\pi)$ за всички разбивания π на n, т.е.

$$\sum_{\substack{\pi:\text{разбиване}\\ \text{на n}}} A(\pi) = \sum_{\substack{\pi:\text{разбиване}\\ \text{на n}}} B(\pi)\,.$$

Решение на задачата

Решение. Нека $a_n = \sum\limits_{\pi} A(\pi)$ и $b_n = \sum\limits_{\pi} B(\pi)$ за всяко естествено n. Нека $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ и $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ са обикновените пораждащи функции на двете редици. Ще докажем, че те съвпадат в някакъв отворен интервал около нулата. Тогава ще следва, че $a_n = b_n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, което всъщност се стремим да докажем.

Първо ще намерим пораждащата функция $f(x)$ на редицата $\{a_n\}_{n\geq 1}$. Припомняме, че a_n е броят на единиците във всички разбивания на n. Ще го пресметнем, като преброим разбиванията с k единици, умножим броя им по k и сумираме тези резултати за всяко k от 1 до n. Така

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k.(\text{брой разбивания на } n \text{ с } k \text{ единици})\,.$$

Трябва да намерим броя разбивания на n, във всяко от които участват по k единици. Този брой е същият като броя на разбиванията на числото $n-k$, които не съдържат единици. Значи

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k.(\text{брой разбивания на } n-k \text{ без единици})\,.$$

Този брой е коефициентът пред x^{n-k} в

$$h(x) = (1+x^2+x^4+\dots+x^{2n}+\dots)(1+x^3+x^6+\dots+x^{3n}+\dots)\dots =$$

$$= \prod_{i=2}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}\,, |x|<1\,.$$

Можем да запишем $h(x)$ във вида
$h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n + \ldots$. Тогава
$a_n = 1.c_{n-1} + 2.c_{n-2} + \cdots + n.c_0 = \sum\limits_{k=0}^{n} k.c_{n-k}$. Следователно a_n е
коефициентът пред x^n в произведението

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} nx^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n\right) = \frac{x}{(1-x)^2} h(x) = \frac{x}{1-x} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i} \,.$$

Така получаваме, че

$$f(x) = \frac{x}{1-x} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i} \,, |x| < 1 \,.$$

Остава да намерим пораждащата функция $g(x)$ на редицата $\{b_n\}_{n\geq 1}$. Припомняме, че b_n е сборът на броя различни числа във всяко разбиване на n. Вместо да броим различите събираеми във всяко разбиване, то ще преброим разбиванията, в които участва k, и ще сумираме за всяко k от 1 до n. Така

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\text{брой разбивания на } n, \text{ в които участва } k\right).$$

Трябва да намерим броя разбивания на n, във всяко от които участва числото k. Този брой е същият като броя на разбиванията на числото $n-k$. Значи

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\text{брой разбивания на } n-k\right).$$

Този брой е коефициентът пред x^{n-k} в

$$r(x) = (1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + \dots)\dots =$$

$$= \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}, |x| < 1.$$

Можем да запишем $r(x)$ във вида
$r(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots + d_n x^n + \ldots$. Тогава
$b_n = d_{n-1} + d_{n-2} + \cdots + d_0 = \sum_{k=0}^{n-1} d_k$. Следователно b_n е коефициентът пред x^n в произведението

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n\right) = \frac{x}{1-x} r(x) = \frac{x}{1-x} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i} \,.$$

Така получаваме, че

$$g(x) = \frac{x}{1-x} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i} \,, |x| < 1 \,.$$

Окончателно $f(x) = g(x)$ за $|x| < 1$, откъдето следва, че $a_n = b_n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, с което задачата е решена.

Благодаря за вниманието!