Числа на Лах

Калоян Стоилов, № 81609 (СУ, ФМИ)

29 април 2021 г.

Числата на Лах се появяват за първи път през 1954 г. в научна публикация* на словенския математик Иво Лах (05. IX. 1896 г. — 23. III. 1979 г.). По смисъл приличат на числата на Стирлинг от първи род и също като тях са два вида — със знак и без знак. Числата на Лах без знак обикновено се бележат така:

$$\left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor, \quad L(n,k) \quad \text{или} \quad \mathscr{L}_{n,k}.$$

По-нататък в текста ще бъде използвано първото обозначение.

Числото на Лах без знак е броят на множествата от k непразни редици, образувани от n дадени елемента, всеки от които се използва точно един път. Редиците понякога се наричат думи, а множеството от n елемента — азбука.

Допустими стойности: n и k са цели неотрицателни числа.

Следните равенства са очевидни:

$$\left\lfloor \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\rfloor = 1 \quad \text{(без букви не можем да образуваме думи);}$$

$$\left\lfloor \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\rfloor = 0 \quad \text{при } n > 0 \quad \text{(трябва да има поне една дума);}$$

$$\left\lfloor \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\rfloor = 1 \quad \text{(всяка дума се състои от една буква);}$$

$$\left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor = 0 \quad \text{при } k > n \quad \text{(не достигат букви).}$$

Заради последното равенство допустимите стойности понякога се ограничават до онези цели неотрицателни числа n и k, за които $k \leq n$. Другите три равенства служат за начални условия.

---

* Ivo Lah, “A new kind of numbers and its application in the actuarial mathematics”, *Boletim do Instituto dos Actuários Portugueses*, **9**: 7–15 (1954).

Твърдение 1. *Рекурентно уравнение за числата на Лах:*

$$\left\lfloor \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\rfloor = (n+k) \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor + \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\rfloor .$$

Доказателство: Разглеждаме два случая за $(n+1)$-вия елемент.

Първи случай: Думата, съдържаща буква № $n+1$, се състои от поне две букви. След премахването на буква № $n+1$ остават n букви, разпределени в k думи. Съществуват $\left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor$ такива разпределения. Буква № $n+1$ може да бъде добавена във всяко от тях на $n+k$ места общо — или след някоя от останалите n букви, или в началото на коя да е от всичките k думи. По този начин се получават $(n+k) \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor$ множества от k думи, съставени от общо $n+1$ букви.

Втори случай: Буква № $n+1$ сама образува дума. Тогава останалите n букви образуват $k-1$ думи, а това може да стане по $\left\lfloor \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\rfloor$ начина.

Сега рекурентното уравнение следва от правилото за събиране. □

Рекурентното уравнение и началните условия позволяват бързо пресмятане на числата на Лах без знак. Получава се следната таблица:

n \ k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	6	6	1	0	0	0	0	0	0
4	0	24	36	12	1	0	0	0	0	0
5	0	120	240	120	20	1	0	0	0	0
6	0	720	1800	1200	300	30	1	0	0	0
7	0	5040	15120	12600	4200	630	42	1	0	0
8	0	40320	141120	141120	58800	11760	1176	56	1	0
9	0	362880	1451520	1693440	846720	211680	28224	2016	72	1

Поредното число на Лах се пресмята за време $\Theta(1)$, значи всички числа $\left\lfloor \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right\rfloor$, където $0 \leq a \leq n$ и $0 \leq b \leq k$, изразходват общо време $\Theta(nk)$.

Ако обаче е нужна стойността само на едно число на Лах, тогава пак трябва да се пресметнат всички числа с индекси, ненадвишаващи неговите. С други думи, числото $\left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor$ се получава за време $\Theta(nk)$, ако се използва рекурентното уравнение и числата с по-малки индекси не са намерени предварително. Възниква въпросът дали има по-бърз метод за пресмятане на числата на Лах.

Твърдение 2. *Явна формула за числата на Лах:*

$$\left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor = \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}.$$

Доказателство: Има $n!$ пермутации без повторение на n елемента (буквите). Всяка от тях може да се разбие на k думи чрез вмъкване на $k-1$ разделителя. Това може да стане по $C_{n-1}^{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$ начина, защото за всеки разделител има $n-1$ възможни места, от които се избират $k-1$ без повторение и без определен ред (все едно е дали ще се каже, че са поставени разделители на места № i и № j, или ще се каже, че те са поставени на места № j и № i). Така получаваме $n!\binom{n-1}{k-1}$ редици от k думи. Множество от k различни думи поражда $k!$ редици, затова множествата са $k!$ пъти по-малко от редиците. Ето защо полученият израз след деление с $k!$ води до желаната формула. $\square$

Пресмятането на число на Лах по явната формула изисква време $\Theta(n+k)$, което е много по-бързо от сметките с рекурентното уравнение. От друга страна, чрез рекурентното уравнение по-бързо се табулират числата на Лах.

Твърдение 3. *Връзка между числата на Стирлинг и числата на Лах:*

$$\left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor = \sum_{j=k}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix}.$$

Доказателство: Без ограничение можем да предположим, че азбуката съвпада с множеството $\{1\,;2\,;3\,;\ldots\,;n\}$. Всяка дума (редица) представлява пермутация на собствените си букви. Например редицата 17, 8, 20 може да се отъждестви с пермутацията 2, 1, 3, защото 17 е второто, 8 е първото, а 20 е третото число (броени от най-малкото към най-голямото). Пермутацията 2, 1, 3 се разлага в независими цикли така: (1 2)(3). След обратен превод се получава (8 17)(20), което е част от по-голяма пермутация (на 1, 2, 3, … , n), породена от всички думи.

Това съответствие е биекция: ако пермутация без повторение на 1, 2, 3, … , n е съставена от j цикъла, то разпределяйки тези цикли в k непразни множества, получаваме първоначалната съвкупност от k думи. Елементите от един цикъл отиват в една и съща дума. Всяка дума е множество (а не редица) от цикли.

Има $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$ пермутации на n елемента с j цикъла и $\begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix}$ начина за разпределяне на j цикъла в k непразни думи, защото циклите са различими (по елементите си), а думите ("кутии" за цикли) са неразличими, тъй като нямат дори пореден номер (налице е множество, не редица от думи). Накрая сумираме по j от k до n вкл. $\square$

Разглеждаме следните две функции:

$$\text{растящ факториел: } x^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2)(x+3)\ldots(x+n-1);$$
$$\text{намаляващ факториел: } x^{\underline{n}} = x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n+1).$$

Както е известно, тези функции имат връзка с числата на Стирлинг:

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k;$$

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} x^{\underline{k}}.$$

Оказва се, че едната може да се изрази чрез другата посредством числата на Лах.

Твърдение 4. *Връзка между функциите растящ и намаляващ факториел посредством числата на Лах:*

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor x^{\underline{k}}.$$

Доказателство: Преобразуваме лявата страна, докато получим дясната:

$$x^{\overline{n}} = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j = \sum_{j=0}^{n} \left(\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \sum_{k=0}^{j} \begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix} x^{\underline{k}} \right) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{j} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix} x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix} x^{\underline{k}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(x^{\underline{k}} \sum_{j=k}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix} \right) = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor x^{\underline{k}}. \qquad \square$$

При внимателно наблюдение върху таблицата с числата на Лах се забелязват следните интересни закономерности.

Твърдение 5. *Някои свойства на числата на Лах:*

а) $\left\lfloor \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\rfloor = n!$ при $n \geq 1$; б) $\left\lfloor \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\rfloor = n(n-1)$ при $n \geq 1$; в) $\left\lfloor \begin{matrix} n \\ \lfloor \sqrt{n} \rfloor \end{matrix} \right\rfloor = \max\limits_{k} \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor$.

По-точно, ако n е произволно, но фиксирано, а k расте от 0 до n включително, то $\left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor$ първо расте, после намалява и е най-голямо единствено при $k = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, освен когато $n = m^2 - 1$ за някое цяло число $m > 1$: тогава най-голямата стойност се достига два пъти — при $k = m-1$ и при $k = m$.

Доказателство: с помощта на явната формула за числата на Лах.

а) $\left\lfloor \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\rfloor = \dfrac{n!}{1!}\dbinom{n-1}{0} = \dfrac{n!}{1}\,.\,1 = n!$ за всяко цяло $n \geq 1$.

б) $\left\lfloor \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\rfloor = \dfrac{n!}{(n-1)!}\dbinom{n-1}{n-2} = n(n-1)$ за всяко цяло $n \geq 1$.

в) $$\left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor : \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\rfloor = \frac{\dfrac{n!}{k!}\dbinom{n-1}{k-1}}{\dfrac{n!}{(k-1)!}\dbinom{n-1}{k-2}} = \frac{n-k+1}{k(k-1)}.$$

Сравнявайки това частно с единицата, намираме интервалите на монотонност:

$$\left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor > \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\rfloor \iff n-k+1 > k(k-1) \iff k^2 < n+1 \iff k < \sqrt{n+1};$$

$$\left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor < \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\rfloor \iff k > \sqrt{n+1}; \qquad \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor = \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\rfloor \iff k = \sqrt{n+1}.$$

От доказаните неравенства следва, че когато k расте от 0 до n включително, числото на Лах първо расте, после намалява. Когато $n+1$ не е точен квадрат, равенството е невъзможно, затова числото на Лах достига най-голяма стойност единствено за $k = \lfloor\sqrt{n+1}\rfloor = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$. А когато $n+1 = m^2$ за някое цяло $m > 1$, тогава равенството е възможно, затова най-голямата стойност на числото на Лах се достига при долен индекс $k = \sqrt{n+1} = m$ и при долен индекс $k-1 = m-1$. Ако $m = 1$, тоест $n = 0$, то най-голямата стойност отново се достига веднъж — при $k = m-1 = 0$ (индексът $k = m = 1$ е недопустим). □

Има също и числа на Лах със знак: $(-1)^n \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor$. Те участват в производните на функцията $e^{1/x}$.

Твърдение 6. $\left(e^{1/x}\right)^{(n)} = e^{1/x} \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^n \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor x^{-n-k}.$

Доказателство: с индукция по n.

База: при $n = 0$. Тъй като производна от нулев ред се явява самата функция, то равенството приема вида $e^{1/x} = e^{1/x}$, което е очевидно вярно.

Индуктивна стъпка: Нека за някое цяло число $n > 0$ е изпълнено равенството

$$\left(e^{1/x}\right)^{(n-1)} = e^{1/x} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1} \left\lfloor \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\rfloor x^{-n+1-k}.$$

Ще докажем, че в такъв случай важи и равенството

$$\left(e^{1/x}\right)^{(n)} = e^{1/x} \sum_{k=0}^{n} (-1)^n \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor x^{-n-k}.$$

Действително, диференцирайки формулата от индуктивното предположение, получаваме следното:

$$\left(e^{1/x}\right)^{(n)} = \left(e^{1/x}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1}\left\lfloor \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\rfloor x^{-n+1-k}\right)' =$$

$$= \left(e^{1/x}\right)' \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1}\left\lfloor \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\rfloor x^{-n+1-k} + e^{1/x}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1}\left\lfloor \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\rfloor (x^{-n+1-k})' =$$

$$= -\, e^{1/x}x^{-2}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1}\left\lfloor \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\rfloor x^{-n+1-k} + e^{1/x}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n}(n+k-1)\left\lfloor \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\rfloor x^{-n-k} =$$

$$= e^{1/x}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n}\left\lfloor \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\rfloor x^{-n-1-k} + e^{1/x}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n}(n+k-1)\left\lfloor \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\rfloor x^{-n-k} =$$

$$= e^{1/x}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n}\left\lfloor \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\rfloor x^{-n-k} + e^{1/x}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n}(n+k-1)\left\lfloor \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\rfloor x^{-n-k} =$$

$$= e^{1/x}(-1)^{n}x^{-2n} + e^{1/x}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n}\left(\left\lfloor \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\rfloor + (n+k-1)\left\lfloor \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\rfloor\right) x^{-n-k} =$$

$$= e^{1/x}(-1)^{n}x^{-2n} + e^{1/x}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n}\left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor x^{-n-k} = e^{1/x}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n}\left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor x^{-n-k}. \qquad \square$$