Задача 10.3. Нека k и n са естествени числа. Означаваме с $\lambda(k,n)$ броя на представянията на k във вида

$$k = a_0 + a_1.2 + a_2.2^2 + \cdots + a_{n-1}.2^{n-1},$$

където $a_i \in \{-1, 0, +1\}$.

а) Да се намери $\lambda(2^i, n)$, където $0 \le i \le n-1$.

б) Да се намери $\lambda(2^i - 1, n)$, където $0 \le i \le n$.

Решение. а) От равенството $2^i = a_0 + a_1.2 + a_2.2^2 + \cdots + a_{n-1}.2^{n-1}$ следва, че $a_0 = a_1 = \cdots = a_{i-1} = 0$. Нека j е най-големият индекс, за който $a_j \ne 0$. Тогава $a_j = 1$ и имаме единствено представяне

$$2^i = -2^i - 2^{i+1} - \ldots - 2^{j-1} + 2^j.$$

Тъй като $j \in \{i, i+1, \ldots, n-1\}$, заключаваме, че $\lambda(2^i, n) = n - i$.

б) Лесно се съобразява, че за нечетни m е в сила рекурентната връзка

$$\lambda(m,n) = \lambda\left(\frac{m-1}{2}, n-1\right) + \lambda\left(\frac{m+1}{2}, n-1\right).$$

Оттук получаваме

$$\begin{array}{rcl}
\lambda(2^i - 1, n) & = & \lambda(2^{i-1} - 1, n-1) + \lambda(2^{i-1}, n-1) \\
\lambda(2^{i-1} - 1, n-1) & = & \lambda(2^{i-2} - 1, n-2) + \lambda(2^{i-2}, n-2) \\
\lambda(2^{i-2} - 1, n-2) & = & \lambda(2^{i-2} - 1, n-3) + \lambda(2^{i-3}, n-3) \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\lambda(2^2 - 1, n-(i-2)) & = & \lambda(2-1, n-(i-1)) + \lambda(2, n-(i-1)) \\
\lambda(1, n-(i-1)) & = & n - i + 1.
\end{array}$$

Сумирайки горните равенства и отчитайки резултата от точка а), получаваме $\lambda(2^i - 1, n) = i(n-i) + 1$.

Забележка. Ако $2^i - 1 = a_0 + a_1.2 + a_2.2^2 + \cdots + a_{n-1}.2^{n-1}$, то числото a_0 е нечетно и от равенството $\dfrac{2^i - 1 - a_0}{2} = a_1 + a_2.2^1 + \cdots + a_{n-1}.2^{n-2}$ следва, че $\lambda(2^i - 1, n) = \lambda(2^{i-1} - 1, n-1) + \lambda(2^{i-1}, n-1) = \lambda(2^{i-1} - 1, n-1) + n - i$. Продължавайки по същия начин (или прилагайки индукция), достигаме до $\lambda(2^i - 1, n) = i(n-i) + 1$.