# Пораждащи функции на множества

Мирослав Фурнаджиев

Факултет по математика и информатика
Софийски университет "Св. Климент Охридски"

20 май 2021 г.

# Теория

**Дефиниция (пораждаща функция на множество)**

Нека $A$ е множество, а $w$ е теглова функция на $A$, като $w : A \to \mathbb{N}$. Пораждаща функция на множеството $A$ с теглова функция $w$ ще наричаме функцията

$$F_A^w(x) = \sum_{a \in A} x^{w(a)}.$$

Когато $w(a) = a$ за всяко $a$, ще пропускаме тегловата функция в записа.

**Теорема 1.** Ако $A \cap B = \varnothing$ и $w$ е теглова функция на множеството $A \cup B$, тогава

$$F^w_{A\cup B}(x) = F^w_A(x) + F^w_B(x).$$

**Доказателство:** Следва директно от дефиницията за пораждаща функция на множество:

$$F^w_{A\cup B}(x) = \sum_{c\in A\cup B} x^{w(c)} = \sum_{c\in A} x^{w(c)} + \sum_{c\in B} x^{w(c)} = F^w_A(x) + F^w_B(x).$$

# Условие на задачата

**Пътнам 2003, задача A6**

Нека $S$ е множеството на неотрицателните цели числа, а $L$ е негово произволно подмножество.

Дефинираме $r_L(n)$ да бъде броят на наредените двойки $(l_1, l_2)$, такива че $l_1, l_2 \in L$, $l_1 < l_2$ и $l_1 + l_2 = n$.

Например $r_S(9) = 5$, защото двойките, отговарящи на условието, са $(0\,;9), (1\,;8), (2\,;7), (3\,;6)$ и $(4\,;5)$.

Нека с $A$ означим множеството на тези неотрицателни цели числа, които съдържат нечетен брой единици в представянето си в двоична бройна система, а с $B$ — тези, които съдържат четен брой единици.

Тоест
$A = \{1\,;2\,;4\,;7\,;8\,;\dots\} = \{1_{(2)}\,;10_{(2)}\,;100_{(2)}\,;111_{(2)}\,;1000_{(2)}\,;\dots\}$
и
$B = \{0\,;3\,;5\,;6\,;9\,;\dots\} = \{0_{(2)}\,;11_{(2)}\,;101_{(2)}\,;110_{(2)}\,;1001_{(2)}\,;\dots\}$

Да се докаже, че $r_A(n) = r_B(n)$ за всяко $n$.

# Решение на задачата

Нека $f_A(x) = \sum\limits_{a \in A} x^a$ е пораждащата функция на множеството $A$. Тогава коефициентът пред $x^n$ във $f_A^2(x)$ ще бъде равен на броя на всички двойки $(a1, a2) \in A$, такива че $a_1 + a_2 = n$.

За да изпълним допълнителното условие $a_1 < a_2$, трябва **от** всички двойки да премахнем тези, при които $a_1 = a_2$ или $a_1 > a_2$.

В първия случай (когато искаме да премахнем двойките, при които $a_1 = a_2$) трябва от $f_A^2(x)$ да извадим $f_A(x^2)$, а във втория случай трябва да разделим на 2, за да покажем, че двойките са наредени, т.е. $(a_1, a_2) \neq (a_2, a_1)$. Така получаваме

$$\sum r_A(n)x^n = \frac{1}{2}(f_A^2(x) - f_A(x^2)). \tag{1}$$

Аналогично дефинираме $f_B(x) = \sum\limits_{b \in B} x^b$ да бъде пораждащата функция на множеството $B$ и тогава $r_B(n)$ ще бъде коефициентът пред $x^n$ във функцията $\frac{1}{2}(f_B^2(x) - f_B(x^2))$.

От Теорема 1 следва, че:

$$f_A(x) + f_B(x) = f_S(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x^n = \frac{1}{1-x}. \quad (2)$$

Нека $a \in A$ и $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ е представянето на $a$ в двоична бройна система. Тогава $2a \in A$, защото $2a = \overline{a_1 a_2 \dots a_n 0}$, т.е. броят на единиците в двоичния запис няма да бъде променен. По обратната причина $2a + 1 \in B$. Оттук следва тъждеството

$$f_A(x) = f_A(x^2) + x f_B(x^2), \quad (3)$$

тоест всяко число $a \in A$ може да бъде представено или като $2n$, където $n \in A$, или като $2k + 1$, където $k \in B$.

Аналогично на (3) извеждаме и тъждеството

$$f_B(x) = f_B(x^2) + x f_A(x^2). \tag{4}$$

От (3) вадим (4) и получаваме

$$\begin{aligned} f_A(x) - f_B(x) &= f_A(x^2) + x f_B(x^2) - f_B(x^2) - x f_A(x^2) \\ &= (1-x)(f_A(x^2) - f_B(x^2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iff (f_A(x) - f_B(x))\frac{1}{1-x} = f_A(x^2) - f_B(x^2) \\ &\iff f_A^2(x) - f_B^2(x) = f_A(x^2) - f_B(x^2) \\ &\iff f_A^2(x) - f_A(x^2) = f_B^2(x) - f_B(x^2) \\ &\iff r_A(n) = r_B(n). \end{aligned}$$

Така доказахме твърдението: $r_A(n) = r_B(n)$ за всяко $n$.