

Доклад по ИГКТГ

Задача "Затворники и кутии"

Мария Гроздева

20.05.2021

Условие

В затвор има 100 затворници, разполагащи с номера от 1 до 100. Тъмните на затвора им предлагат последен шанс да се спасят от предстоящата гибел.

В стая ще бъдат наредени в редица 100 кутии, всяка от които ще съдържа число в интервала от 1 до 100 (всяко число се среща точно по веднъж), разбъркани на произволен принцип. Затворниците ще влизат в стаята един по един. Всеки от тях ще може да отвори и да види съдържанието на не повече от 50 кутии. След излизането на всеки един от затворниците от стаята утиите биват затворени и оставени точно в състоянието, в което са били преди влизането му.

Ако всеки затворник успее да открие номера си в рамките на 50 отворени кутии, всички биват освободени. Ако дори един от тях не успее да намери номера си, всички умират.

Затворниците имат право да обмислят някаква стратегия, но само преди първият от тях да е влязъл в стаята. След това общуването помежду им е забранено.

Каква би била най-добрата стратегия за успех на затворниците?

Решение

Ако всеки от затворниците избере 50 кутии на случаен принцип, то всеки от тях ще има вероятност $\frac{1}{2}$ да намери собствения си номер. Следователно вероятността всички затворници да си намерят съответните номера е

Изглежда, тази "стратегия" не би ги спасила

Оказва се обаче, че съществува стратегия, която ще донесе на затворниците

$\approx 30\%$ шанс да се спасят. Същността е, че всеки затворник ще използва информацията, получена от по-рано отворените кутии, за да избере коя да е следващата.

(Забележка: Тази стратегия **не** повишава шанса за успех на индивидуалните затворници. Отново всеки индивидуален затворник има $\frac{1}{2}$ вероятност за успех. Но тази стратегия е печеливша, когато се следва от всички затворници едновременно, поради факта, че разпределението на числата в кутиите остава непроменено за всички.)

Алгоритъм (стратегия)

1. Първата отворена кутия от всеки затворник е тази, номерирана с неговия номер.
2. Ако тази кутия съдържа номера на съответния затворник — успех за него.
3. В противен случай, затворникът отваря кутия с номер числото, намиращо се в предходната отворена кутия.
4. Стъпки 2 и 3 се повтарят, докато:
 - Затворникът намери номера си — успех.
 - Затворникът изразходи 50-те си опита — провал.

Всяка кутия съдържа **точно едно** число и числата са **уникални**. Следователно или кутия съдържа собствения си номер, или числото в нея "сочи" към друга кутия.

Можем да мислим, че всяка кутия участва в някакъв цикъл. При това **единствен!** От горните разсъждения следва, че имаме два варианта: ако кутията съдържа собствения си номер, самата тя представлява цикъл с дължина единица; ако **не** съдържа собствения си номер, тя участва в **точно един** цикъл с дължина ≥ 2 .

След като всеки затворник започва с кутията, номерирана с неговия номер, тази кутия със сигурност ще бъде част от цикъл, който съдържа кутия, съдържаща номера на затворника. С други думи, затворникът със сигурност ще намери кутията, съдържаща неговия номер. Въпросът е дали ще успее да го направи за ≤ 50 хода. Тоест питаме се дали въпросната кутия е част от цикъл с дължина ≤ 50 . **Само ако това е вярно**, затворникът ще по-жъне успех.

Ако изобщо съществува цикъл с дължина > 50 , то затворниците, чиито номера се намират в този цикъл, ще се провалят. А оттам и всички.

Следователно задачата "Какъв шанс за успех имат затворниците, използвайки тази стратегия?" се свежда до задачата "Каква е вероятността перmutация на числата от 1 до 100 да не съдържа цикъл с дължина > 50 ?". (Забележка: Тъй като сме взели > 50 числа, от останалите ≤ 49 числа няма как да се получи цикъл с дължина над 50.)

Ще изчислим колко различни перmutации имат цикъл с дължина l , където $l > 50$, за да намерим вероятността затворниците да "попаднат" на такава перmutация.

Колко перmutации имат **цикъл с дължина 51**?

Всички числа са 100. Можем да изберем по $\binom{100}{51}$ начина кои от тях да участват в цикъл. Избрани числа можем да перmutираме по $50!$ различни начина (поради цикличната симетрия). Останалите 49 числа можем да перmutираме по $49!$ начина. Получаваме, че броят перmutации, съдържащи цикъл с дължина 51, е

$$\binom{100}{51} \cdot 50! \cdot 49! = \frac{100!}{51!} \cdot 50! = \frac{100!}{51}.$$

Аналогично, броят перmutации, съдържащи цикъл с дължина 52, е $\frac{100!}{52}$ и т.н.

Следователно вероятността да имаме цикъл с дължина l , където $l > 50$, е

$$\frac{1}{100!} \cdot \sum_{l=51}^{100} \frac{100!}{l} = \frac{1}{100!} \left(\frac{100!}{51} + \dots + \frac{100!}{100} \right) = \frac{1}{51} + \dots + \frac{1}{100} \approx 0,6881.$$

Оттук получаваме, че вероятността за успех на затворниците е

$$1 - 0,6881 \approx 0,3119 = \mathbf{31,19\%}.$$