

$\approx 30\%$ шанс да се спасят. Същността ѝ е, че всеки затворник ще използва информацията, получена от по-рано отворените кутии, за да избере коя да е следващата.

(Забележка: Тази стратегия **не** повишава шанса за успех на индивидуалните затворници. Отново всеки индивидуален затворник има $\frac{1}{2}$ вероятност за успех. Но тази стратегия е печеливша, когато се следва от всички затворници едновременно, поради факта, че разпределението на числата в кутиите остава непроменено за всички.)

Алгоритъм (стратегия)

1. Първата отворена кутия от всеки затворник е тази, номерирана с неговия номер.
2. Ако тази кутия съдържа номера на съответния затворник — успех за него.
3. В противен случай, затворникът отваря кутия с номер числото, намиращо се в предходната отворена кутия.
4. Стъпки 2 и 3 се повтарят, докато:
 - Затворникът намери номера си — успех.
 - Затворникът изразходи 50-те си опита — провал.

Всяка кутия съдържа **точно едно** число и числата са **уникални**. Следователно или кутия съдържа собствения си номер, или числото в нея ”сочи” към друга кутия.

Можем да мислим, че всяка кутия участва в някакъв цикъл. При това **единствен!** От горните разсъждения следва, че имаме два варианта: ако кутията съдържа собствения си номер, самата тя представлява цикъл с дължина единица; ако **не** съдържа собствения си номер, тя участва в **точно един** цикъл с дължина ≥ 2 .

След като всеки затворник започва с кутията, номерирана с неговия номер, тази кутия със сигурност ще бъде част от цикъл, който съдържа кутия, съдържаща номера на затворника. С други думи, затворникът със сигурност ще намери кутията, съдържаща неговия номер. Въпросът е дали ще успее да го направи за ≤ 50 хода. Тоест питаме се дали въпросната кутия е част от цикъл с дължина ≤ 50 . **Само ако това е вярно**, затворникът ще постигне успех.

Ако изобщо съществува цикъл с дължина > 50 , то затворниците, чиито номера се намират в този цикъл, ще се провалят. А оттам и всички.

Следователно задачата "Какъв шанс за успех имат затворниците, използвайки тази стратегия?" се свежда до задачата "Каква е вероятността пермутация на числата от 1 до 100 да **не** съдържа цикъл с дължина > 50 ?". (Забележка: Тъй като сме взели > 50 числа, от останалите ≤ 49 числа няма как да се получи цикъл с дължина над 50.)

Ще изчислим колко различни пермутации имат цикъл с дължина l , където $l > 50$, за да намерим вероятността затворниците да "попаднат" на такава пермутация.

Колко пермутации имат **цикъл с дължина 51**?

Всички числа са 100. Можем да изберем по $\binom{100}{51}$ начина кои от тях да участват в цикъл. Избраните числа можем да пермутираме по $50!$ различни начина (поради цикличната симетрия). Останалите 49 числа можем да пермутираме по $49!$ начина. Получаваме, че броят пермутации, съдържащи цикъл с дължина 51, е

$$\binom{100}{51} \cdot 50! \cdot 49! = \frac{100!}{51!} \cdot 50! = \frac{100!}{51}.$$

Аналогично, броят пермутации, съдържащи цикъл с дължина 52, е $\frac{100!}{52}$

и т.н.

Следователно вероятността да имаме цикъл с дължина l , където $l > 50$, е

$$\frac{1}{100!} \cdot \sum_{l=51}^{100} \frac{100!}{l} = \frac{1}{100!} \left(\frac{100!}{51} + \dots + \frac{100!}{100} \right) = \frac{1}{51} + \dots + \frac{1}{100} \approx 0,6881.$$

Оттук получаваме, че вероятността за успех на затворниците е

$$1 - 0,6881 \approx 0,3119 = \mathbf{31,19\%}.$$