

Граф на Петерсен

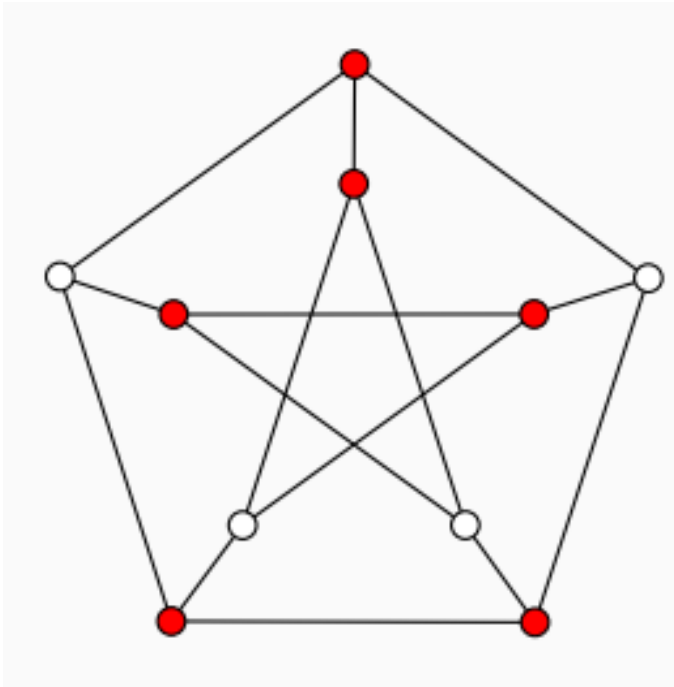
Никол Христова

Приложна математика, IV курс

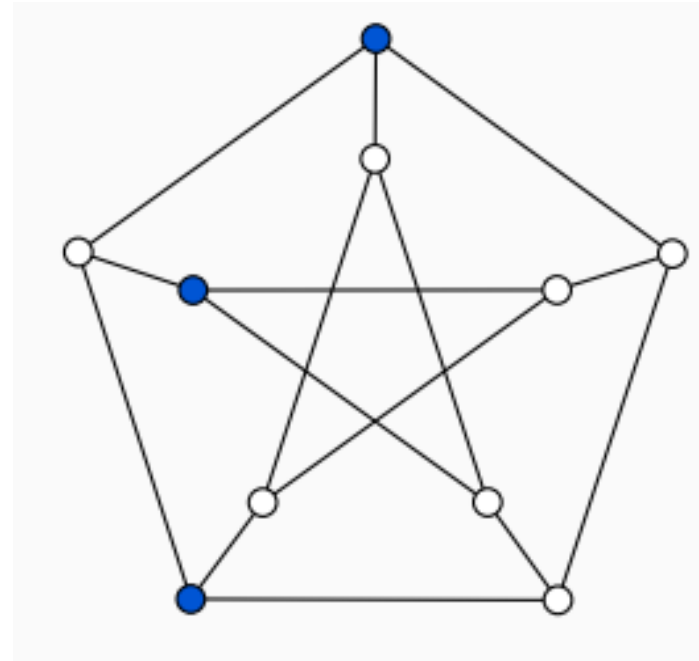
Факултетен номер: 31524

ДЕФИНИЦИЯ:

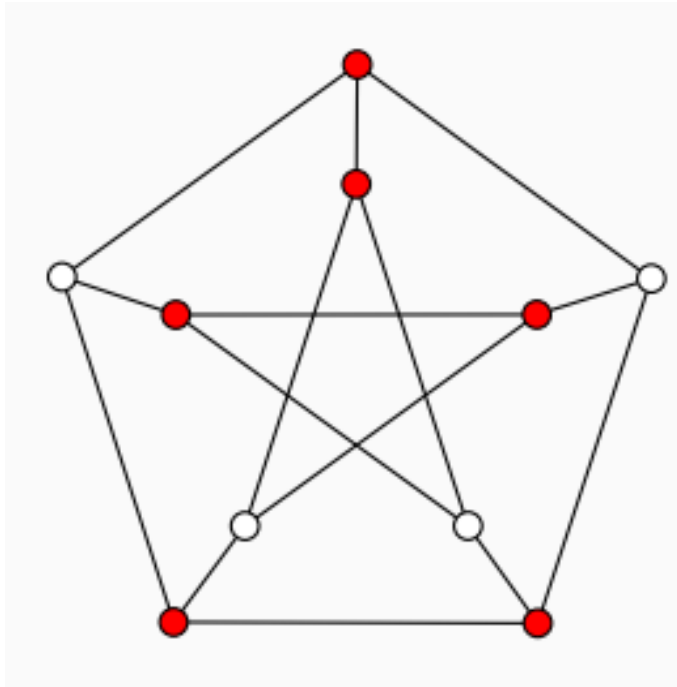
Граф на Petersen е 3-регулярен граф с 10 върха и 15 ребра



Върхово покриване с 6 върха



Доминиращо множество с 3 върха

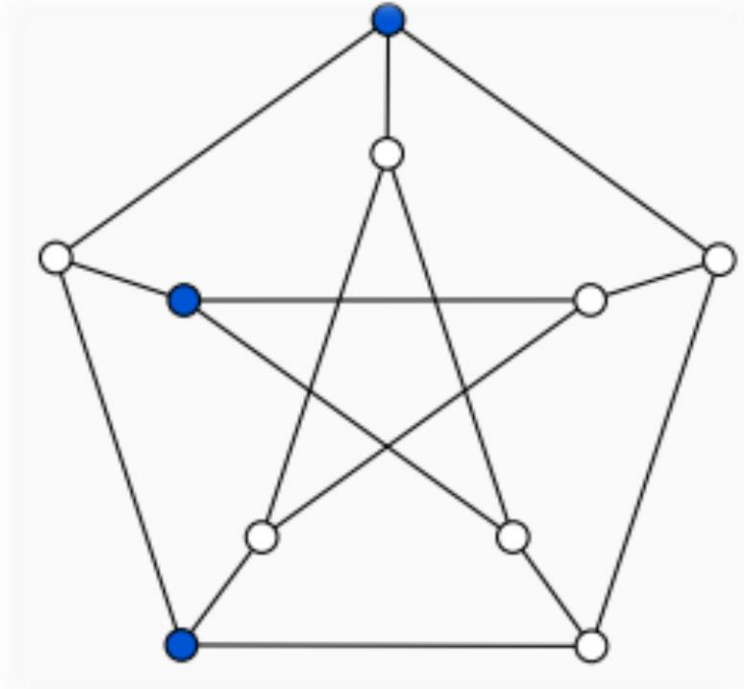


ЗАБЕЛЕЖКА:

Граф на Petersen не може да бъде покрит с по-малко от 6 върха, защото само външният петоъгълник иска поне 3 върха, а независимо от това вътрешните 5 диагонала искат също поне 3 върха \Rightarrow 6 е долната граница за мощността на върховото покриване.

$$\tau(P) = 6$$

ЗАБЕЛЕЖКА:



Граф на Petersen не може да бъде доминиран от по-малко от 3 върха, защото е 3-регулярен, а в 3-регулярен граф един връх може да доминира най-много 4 върха общо (включително себе си) \Rightarrow кои да е два върха могат да доминират най-много $2 \cdot 4 = 8$ върха общо (включително себе си). Графът на Petersen има 10 върха, следователно не може да бъде доминиран от 2 върха.

$$\gamma(P) = 3$$

ТВЪРДЕНИЕ:

Графът на Petersen не е планарен.

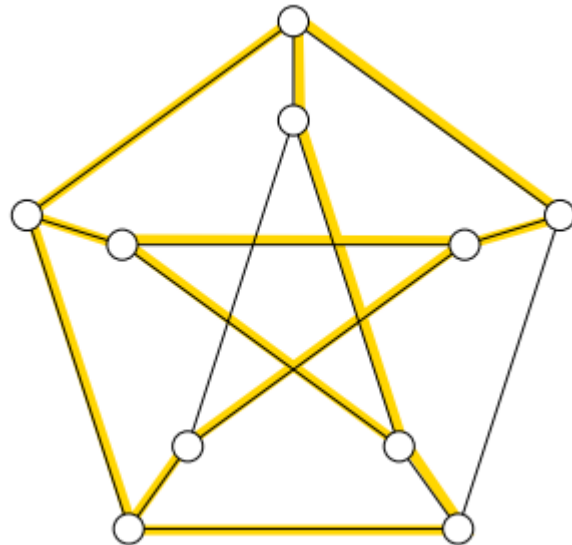
Ще докажем това твърдение по различни начини:

- Теорема на Куратовски.
- Теорема на Вагнер.
- Теорема за връзката между m и n при планарни графи.

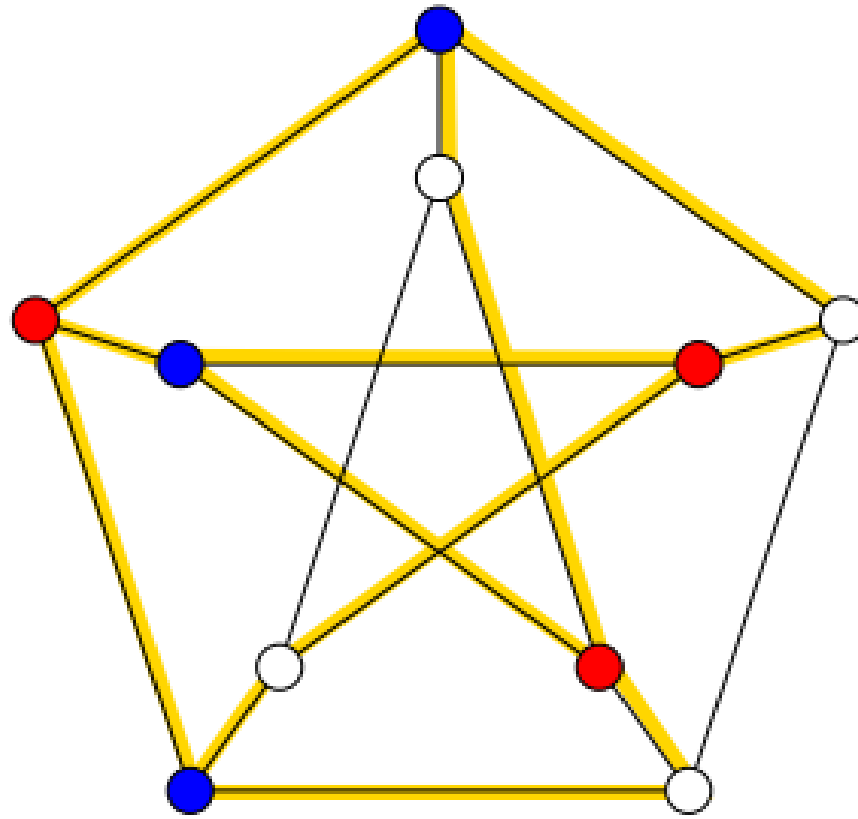
Теорема на Куратовски

Граф е планарен \Leftrightarrow не съдържа подграф, хомеоморфен на K_5 или $K_{3,3}$.

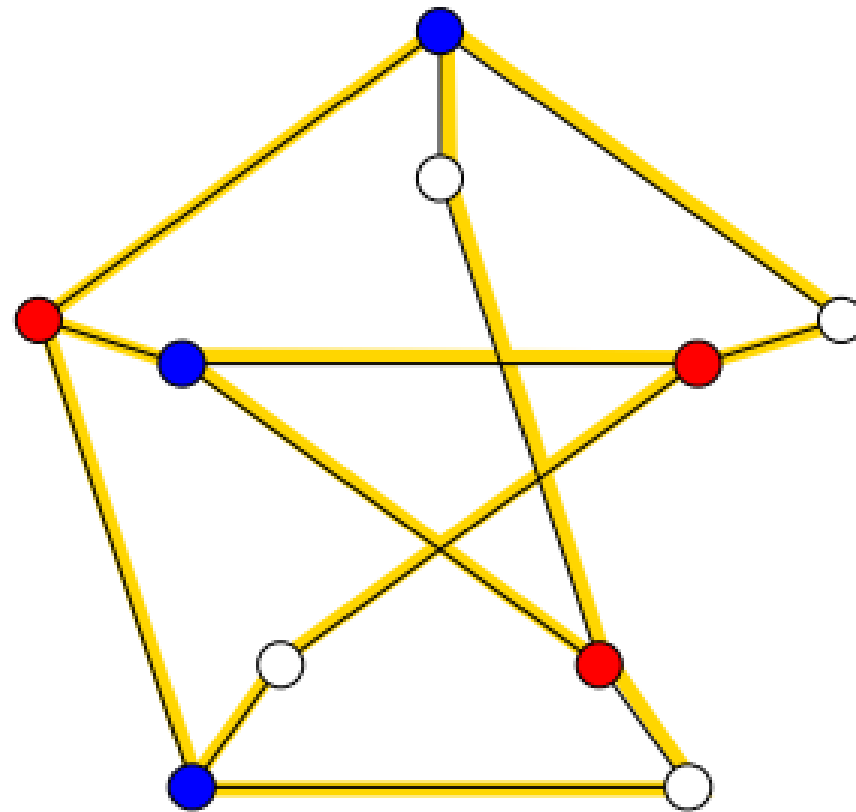
Графът на Petersen съдържа подграф, хомеоморфен на $K_{3,3}$.
На следната рисунка е показан един такъв подграф, нарисуван с жълто върху графа на Petersen:



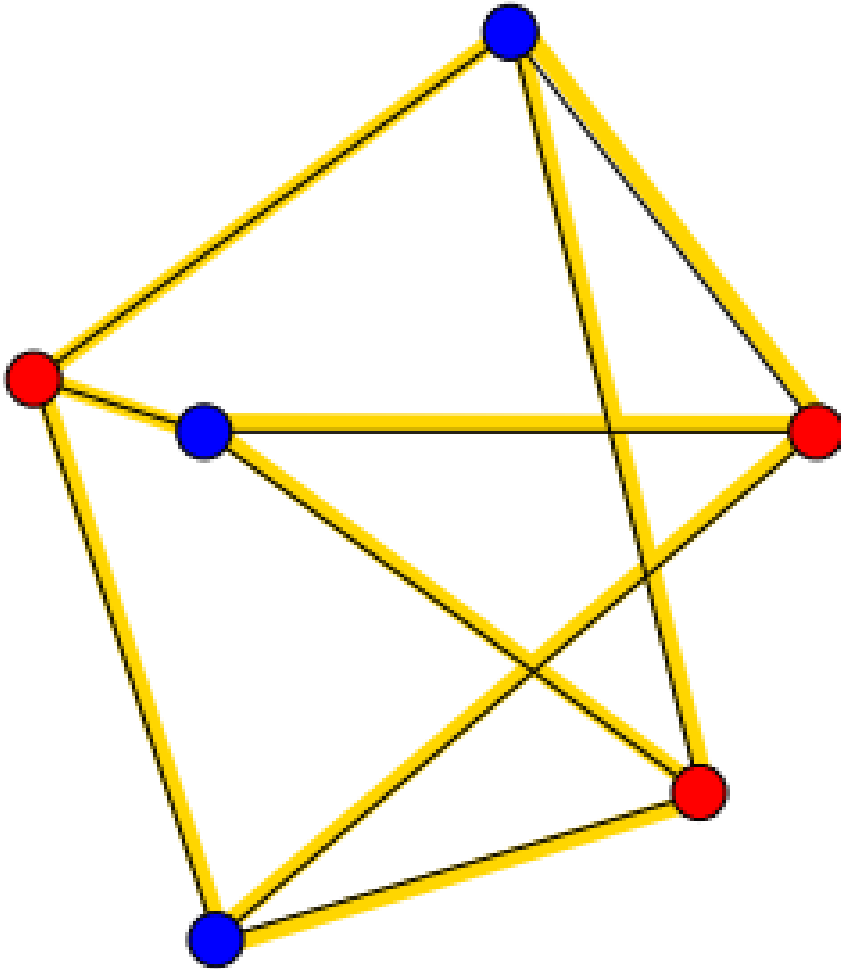
Жълтият подграф има върхове само от степени 2 и 3. Нека оцветим в червено и синьо върховете му от степен 3.



За да остане исканият подграф, ще изтрием ребрата, които не са оцветени в жълто:



И ще свием всички възможни ребра чрез върхове от степен 2.



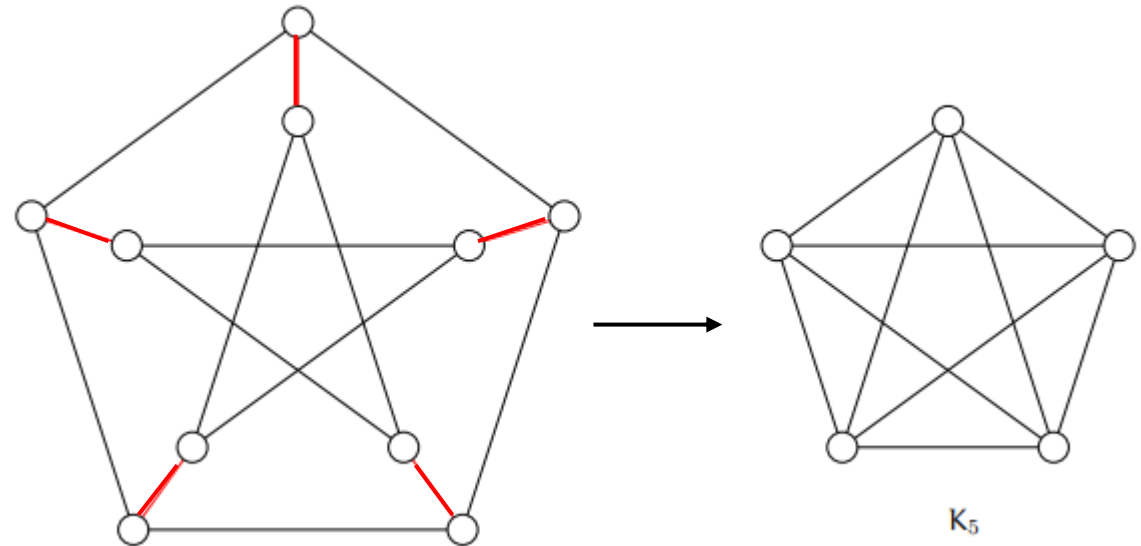
Така ясно се вижда, че
полученият граф е именно
 $K_{3,3}$, като върховете от единия
му дял са червените върхове,
а от другия му дял са сините
върхове.

⇒ Графът на Петерсен съдържа
подграф, хомеоморфен на
 $K_{3,3}$, следователно не е планарен

Теорема на Вагнер

Граф е планарен \Leftrightarrow не съдържа нито K_5 , нито $K_{3,3}$ като минори.

Графът на Петерсен съдържа K_5 по много очевиден начин — ако на следната рисунка на графа на Петерсен изтрием всяко едно от петте червени ребра, като идентифицираме двата му края, ще получим точно K_5 . \Rightarrow Графът на Петерсен не е планарен.



Теорема за връзката между m и n при планарни обикновени графи

За всеки планарен обикновен граф G (не непременно свързан) с поне две ребра, ако n = брой върхове, m = брой ребра и k = обхвата, то

$$m \leq \frac{k}{k-2} (n-2).$$

За графа на Петерсен $k = 5$, $n = 10$, тогава от теоремата:

$$m \leq \frac{5}{5-2} (n-2) = \frac{5n}{3} - \frac{10}{3} = 13\frac{1}{3}.$$

Но $m=15$, което значи, че графът на Петерсен има прекалено много ребра \Rightarrow не е планарен.