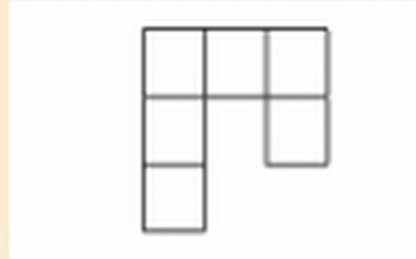
Покриване на правоъгълник с вдлъбнати фигури

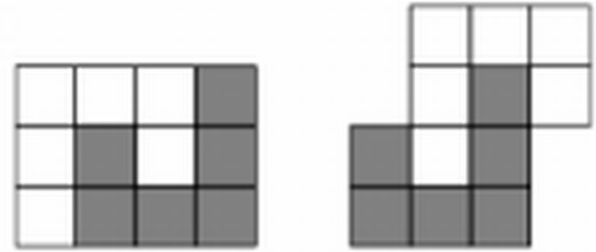
Калоян Кутийски, № 81978 —
доклад по ИГКТГ (СУ, ФМИ),
20. 05. 2021 г.

Задача 3 от МОМ 2004 г.



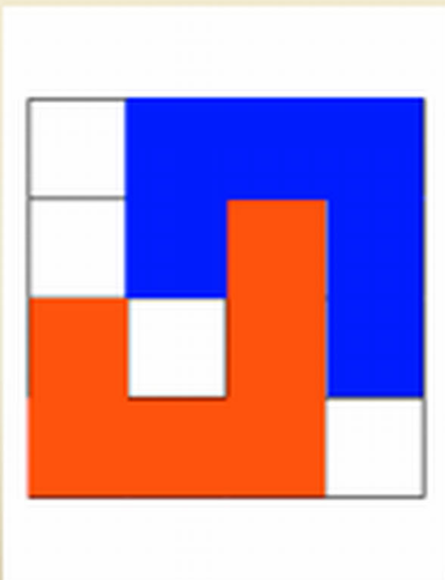
- Да се намерят всички правоъгълници $m \times n$, които могат да бъдат покрити с фигури във формата на кука, съставена от шест квадрата със страна 1.
- Фигурите не могат да се застъпват, нито да излизат извън правоъгълника.
- Всички размери (вкл. m и n) са цели положителни числа.

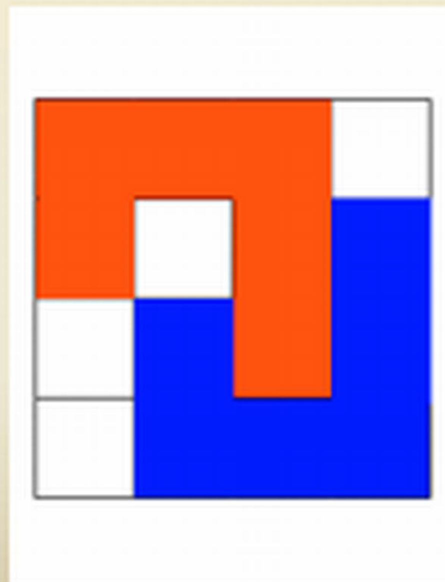
Обединяване на куките по двойки

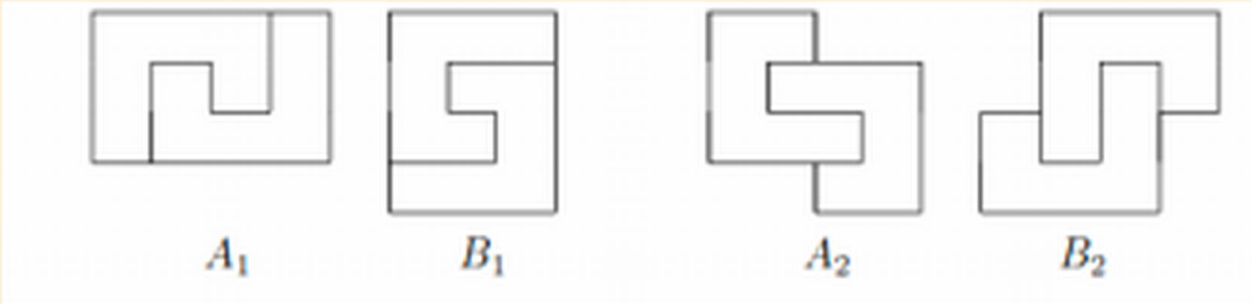


- Основната трудност при редене на куки е празното квадратче, оградено от три страни. То може да се запълни само с някой от двата края на друга кука.
- Когато празното квадратче на една кука се запълни от втора кука, празното квадратче на втората кука се запълва от първата кука.
- Две куки могат да се обединят по два начина. Обединенията ще наричаме плочки. Така задачата се свежда до нареждане на такива плочки от дванайсет квадратчета.

Другите начини за съединяване на две куки
водят до образуване на празнини,
които не могат да се запълнят.







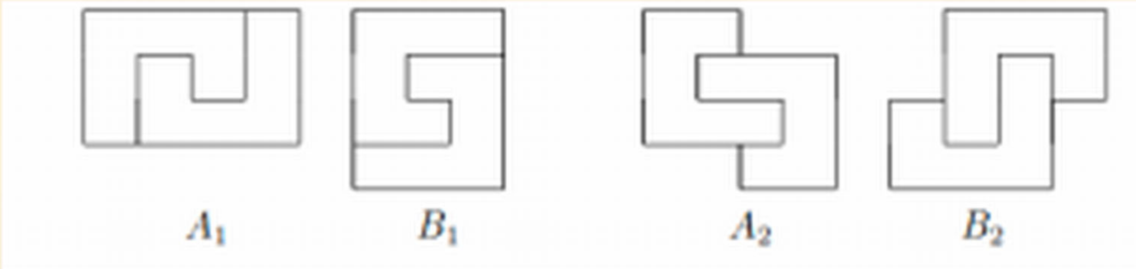
Свойства на правоъгълника от тип $m \times n$

- Всяка плочка има 12 квадратчета $\Rightarrow 12 \mid m.n$.
- Нека m е височината, а n е ширината (това не е ограничение: размяната на ролите води само до завъртане на правоъгълника).
- Ще разгледаме три случая:
  - $4 \mid m$ и $3 \mid n$: запълваме с плочки от тип B_1;
  - 12 дели m, но 3 не дели n;
  - 4 не дели нито m, нито n.

Втори случай: 12 дели m, но 3 не дели n

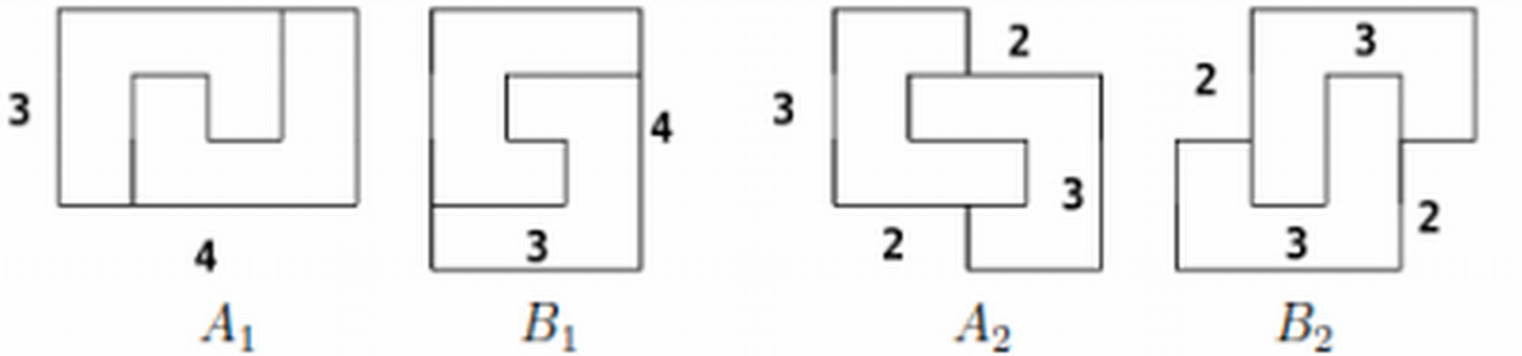
- Ако n е 1 или 2, не можем да сложим плочка.
- Ако $n = 5$, няма как да запълним правоъгълника (твърде тясно е за две плочки една до друга).
- В противен случай n е от вида $n = 3p + 4k$.
- Разделяме правоъгълника на два по-малки:
  - $12s \times 3p$ – попада в първия случай;
  - $12s \times 4k$ – попада в първия случай;

  Запълваме двете части съответно.



Трети случай: 4 не дели нито m, нито n

- 24 не дели $m.n \Rightarrow$ Броят на плочките е нечетен.
- $12|m.n \Rightarrow$ Числата m и n са четни.
- Ако общият брой плочки от видовете A_1 и A_2 е нечетен, оцветяваме всеки четвърти стълб. (Ако има общо нечетен брой плочки B_1 и B_2, оцветяваме всеки четвърти ред.)
- Всеки стълб се състои от четен брой квадратчета. $\Rightarrow$ Има общо четен брой оцветени квадратчета.



- Плочките от видовете A_1 и A_2 са широки 4 квадратчета $\Rightarrow$ пресичат един оцветен стълб. Високи са по 3 квадратчета $\Rightarrow$ всяко покрива точно толкова от стълба. Допуснахме, че плочките от тези два вида са общо нечетен брой $\Rightarrow$ Цветните квадратчета, покрити с А-та, са нечетен брой. (1)
- Всяка плочка от вид B_1 покрива 0 или 4 цветни квадратчета.
- Всяка плочка B_2 покрива 2 или 4 цветни квадратчета.
  $\Rightarrow$ B_1 и B_2 покриват четен брой цветни квадратчета. (2)
- От (1) и (2) $\Rightarrow$ Общият брой покрити цветни квадратчета е нечетно число. (Противоречие!)

Изводи:

- Можем да покрием с куки правоъгълниците $m \times n$, за които $4|m$ и $3|n$ или $12|m$ и n не е 1, 2 и 5 (или обратно).

- Това са същите правоъгълници, които могат да се покрият с плочки 4×3, но има покрития, използващи другия вид плочки, например покритието на дъска 19×24, показано вдясно.