Неизоморфни графи с много сходства

Калоян Тодорков, № 81800 (СУ, ФМИ)

Задача: Докажете, че има естествено число n_0, такова че за всяко $n > n_0$ съществуват два неизоморфни графа G_1 и G_2, за които е вярно следното:
— Всеки от двата графа има $2n$ върха и n^2 ребра.
— G_1 и G_2 притежават равен брой прости пътища с дължина k за всяко цяло k от 1 до $\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor$ включително.

Решение: Не се иска всички прости пътища в G_1 и G_2 да са равен брой, а само част от простите пътища — тези с дължини, ненадвишаващи $\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor$. Това ни подсказва да построим G_1 и G_2 така, че да си приличат в малък мащаб, но да се различават в голям мащаб.

Първо ще нагласим графите да имат един и същ брой прости пътища, после ще се погрижим да имат n^2 ребра. Използваме това, че в условието не се изисква някой от графите да е свързан. Затова ще построим G_1 и G_2 така, че всеки от тях да има по две компоненти на свързаност, като едната от тях гарантира еднаквост на броя на ребрата, а другата компонента способства за липсата на изоморфизъм.

Ще означаваме с C_n граф с n върха и n ребра, представляващ прост цикъл. За всяко цяло число L от 1 до $n-1$ вкл. графът C_n съдържа точно n прости пътя с дължина L.

Ако вземем например $n = 3$, тогава C_6 и обединението на C_3 и C_3 имат равен брой върхове (шест), броят на простите пътища с дължини до $\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor = 1$ е един и същ в двата графа (шест). Така е удовлетворено второто изискване. Обаче ребрата са само шест, а не девет, т.е. първото изискване е нарушено. Налага се да поправим това построение, но именно то е идеята на решението.

С K_n ще обозначаваме пълния граф с n върха; той има $n(n-1)\,/\,2$ ребра. Графът $K_{2n-6\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor}$ има $\left(n - 3\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor\right)\left(2n - 6\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor - 1\right)$ ребра. Тъй като

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\left(n - 3\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor\right)\left(2n - 6\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor - 1\right)}{n^2 - 6\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor} = 2 > 1,$$

то за достатъчно големи n (т.е. за $n > n_0$ при подходящо n_0) важи неравенството

$$\left(n - 3\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor\right)\left(2n - 6\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor - 1\right) > n^2 - 6\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor.$$

С други думи, за $n > n_0$ графът $K_{2n-6\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor}$ има повече от $n^2 - 6\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor$ ребра.

От графа $K_{2n-6\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$ премахваме толкова ребра (произволно избрани), че да останат точно $n^2 - 6\left\lfloor\sqrt{n}\right\rfloor$ ребра. Получения граф означаваме с T_n. По построение T_n има $2n - 6\left\lfloor\sqrt{n}\right\rfloor$ върха и $n^2 - 6\left\lfloor\sqrt{n}\right\rfloor$ ребра.

Сега вече сме готови да поправим построението от предишната страница така, че всички изисквания да бъдат удовлетворени.

Нека графът G_1 представлява обединението на T_n, $C_{3\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$ и $C_{3\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$; а пък G_2 нека е обединението на T_n и $C_{6\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$. Всеки от графите G_1 и G_2 има точно $2n$ върха и точно n^2 ребра, тоест налице е първата от двете прилики. Ще се убедим, че присъства и втората прилика — G_1 и G_2 имат равен брой прости пътища с дължина k за всяко $k \leq \left\lfloor\sqrt{n}\right\rfloor$. За целта да означим с $f(G, k)$ броя на простите пътища с дължина k в графа G. Тогава за всяко $k \leq \left\lfloor\sqrt{n}\right\rfloor$ са изпълнени следните равенства:

$$f(G_1, k) = f(T_n, k) + 2f(C_{3\lfloor\sqrt{n}\rfloor}, k) = f(T_n, k) + 2 \,.\, 3\left\lfloor\sqrt{n}\right\rfloor =$$
$$= f(T_n, k) + 6\left\lfloor\sqrt{n}\right\rfloor = f(T_n, k) + f(C_{6\lfloor\sqrt{n}\rfloor}, k) = f(G_2, k).$$

Тоест G_1 и G_2 имат равен брой прости пътища с дължина k.

И така, изпълнени са и двете изисквания, тоест налице са двете прилики между G_1 и G_2. Налице е и желаната разлика: графите G_1 и G_2 не са изоморфни, защото се състоят от различен брой компоненти (три и две съответно).

Условието и решението на задачата са взети от тази страница в Интернет: https://math.stackexchange.com/questions/1418340/extremely-difficult-graph-theory-question (страницата съдържа и други решения).