Задача на Йосиф Флавий

Йосиф бен Матитяху, по-известен като Йосиф Флавий, е еврейски свещеник, живял през I век сл. Хр. Против волята си е взет за войник във въстанието срещу римляните в Юдея през 66 г., дори е избран за командир на областта Галилея. След падането на областта е заловен и превърнат в пленник на Веспасиан. През 69 г. Веспасиан става римски император и впоследствие Йосиф е освободен, като взема фамилното име на Веспасиан и се нарича Йосиф Флавий. Придобива известност с трудовете си по история, които са ценен източник на сведения, тъй като авторът е участвал в повечето от описаните събития.

Залавянето на войниците на Йосиф от римляните по време на въстанието се превръща в повод за интересна математическа задача. Обкръжени от римляните, въстаниците се скриват в пещера. Решават да се самоубият, за да не се предадат. Отначало Йосиф не се съгласява с тяхното решение, но виждайки настойчивостта им, приема предложението. За да се избегне самоубийството, смятано за тежък грях, Йосиф предлага следната процедура. Той и войниците му, 41 души, се нареждат в кръг и се номерират подред: № 1, № 2, № 3, . . . , № 41 по посока на часовниковата стрелка. След което войник № 2 убива № 3, № 5 убива № 6 и тъй нататък: № $3j-1$ убива № $3j$. Иначе казано, умира всеки трети войник, убиван от съседа си с по-малък номер. Накрая остават живи Йосиф и Яков. Те се предават и са пощадени от римляните. Въпросът е на кои места са стояли.

Задачата има много варианти. Ще я опростим в известна степен, като приемем, че избиването на войниците продължава, докато остане един жив. Задачата може да се обобщи чрез замяната на 3 с k: умира всеки k-ти човек по кръга, тоест умират № k, № $2k$, № $3k$ и тъй нататък, докато поредното кратно на k надхвърли n, след което броенето продължава от малките номера. Да означим отговора на задачата с $J(n\,;k)$. Не е известна явна формула за $J(n\,;k)$ освен в частния случай $k=2$. Таблицата от първите стойности на функцията $J(n\,;2)$ изглежда така:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$J(n,2)$	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13

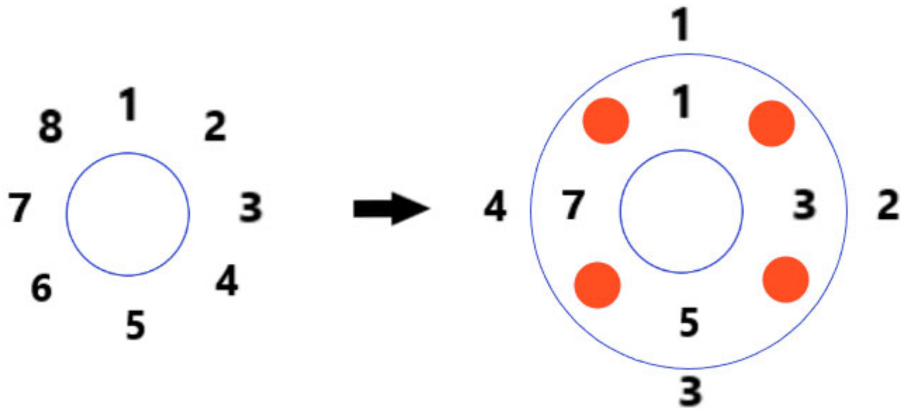
Забелязваме зависимост в стойностите на $J(n\,;2)$: те образуват растяща редица от последователни нечетни числа, която се прекъсва, започвайки пак от единица, всеки път, когато n е точна степен на двойката. Тоест в сила е следното твърдение.

Теорема: Ако $n = 2^a + s$, където $0 \le s < 2^a$, то $J(n\,;2) = 2s + 1$.

Преди да докажем това твърдение, ще изведем някои по-прости резултати, които ще използваме в доказателството.

Лема 1: $J(n\,;2) = 2\,.\,J(n/2\,;2) - 1$ за всяко четно n.

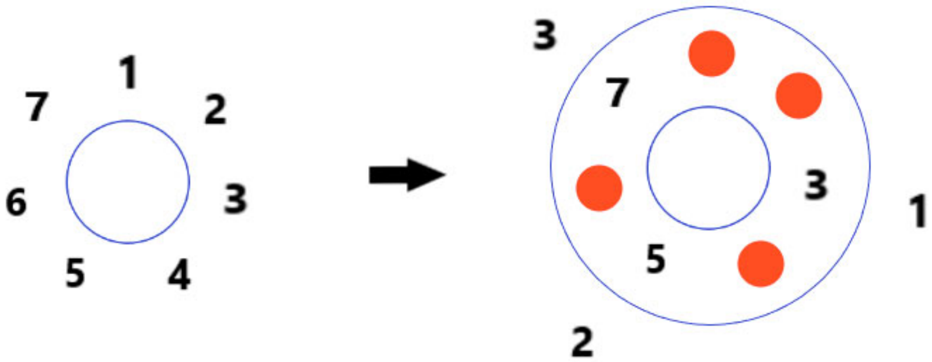
Доказателство: Нека премахнем загиналите при първата обиколка по кръга. Получаваме нов кръг от хората на нечетни позиции — № 1, № 3, № 5, . . . , № $n-1$. Преномерираме ги с числата от 1 до $n/2$, тоест позиция № x при втората обиколка съответства на позиция № $2x-1$ от първата обиколка.



При втората обиколка се оказва, че процедурата започва пак от позиция № 1. Следователно накрая ще оцелее човекът на позицията с нов номер № $J(n/2\,;2)$. Нейният стар номер е $2\,.\,J(n/2\,;2) - 1$. От друга страна, старият номер е № $J(n\,;2)$ по определение. Ето защо $J(n\,;2) = 2\,.\,J(n/2\,;2) - 1$.

Лема 2: $J(n\,;2) = 2\,.\,J((n-1)/2\,;2) + 1$ за всяко нечетно n.

Доказателство: След първата обиколка ще загинат всички на четна позиция и човекът на позиция № 1. Премахваме загиналите и преномерираме оцелелите. Така, ако някой е на позиция x при втората обиколка, той е бил на позиция $2x+1$ отначало.



Нека $n = 2m+1$. В началото на втората обиколка броят на оцелелите е $m = (n-1)/2$ и процедурата продължава от новия № 1. Следователно последният оцелял ще има нов номер $x = J(m\,;2)$, а съответният стар номер е $J(n\,;2) = 2x+1$. Заместваме x и m: $J(n\,;2) = 2\,.\,J(m\,;2) + 1 = 2\,.\,J((n-1)/2\,;2) + 1$.

Двете формули могат да се запишат заедно по следния начин.

Лема 3: $J(n\,;2) = 2\,.\,J(\lfloor n/2 \rfloor\,;2) + (-1)^{n+1}$ за всяко естествено число n.

Сега вече можем да докажем, че нарастването на редицата J(n ; 2) се прекъсва от единица всеки път, когато n стане равно на степен на двойката.

Лема 4: $J(2^a ; 2) = 1$ за всяко цяло неотрицателно число a.

Доказателство: с математическа индукция по степенния показател a.

База: $a = 0$. Тогава $J(2^a ; 2) = J(1 ; 2) = 1$, защото сам човек оцелява винаги.

Индуктивна стъпка: Нека $J(2^a ; 2) = 1$ за някое цяло неотрицателно число a. От лема 1 намираме $J(2^{a+1} ; 2) = 2 . J(2^a ; 2) - 1 = 2 . 1 - 1 = 1$.

Когато n се изменя между поредни степени на двойката, стойностите на J(n ; 2) образуват редица от последователни нечетни числа: 1, 3, 5 . . . Записано формално: ако $n = 2^a + s$, където $0 \le s < 2^a$, то $J(n ; 2) = 2s + 1$.

Тази теорема (формулирана преди няколко страници) е основният резултат в настоящото изложение.

Доказателство на теоремата: с индукция по a.

База: $a = 0$. Тогава единствената възможност е $s = 0$, откъдето $n = 1$. Ето защо доказваното равенство се свежда до J(1 ; 2) = 1, което вече беше установено.

Индуктивна стъпка: Нека $J(2^a + s ; 2) = 2s + 1$ за някое цяло число $a \ge 0$ и за всяко s, за което $0 \le s < 2^a$. Ще докажем, че $J(2^{a+1} + p ; 2) = 2p + 1$ за всяко p, за което $0 \le p < 2^{a+1}$. Действително, от лема 3 намираме

$$J(2^{a+1} + p ; 2) = 2 . J(2^a + \lfloor p / 2 \rfloor ; 2) + (-1)^{p+1} = 2 . (2 . \lfloor p / 2 \rfloor + 1) + (-1)^{p+1} =$$

$$= 4 . \lfloor p / 2 \rfloor + 2 + (-1)^{p+1} = 2p + 1 - (-1)^{p+1} + (-1)^{p+1} = 2p + 1.$$

В този вариант на задачата $J(41; 2) = J(2^5 + 9 ; 2) = 2 . 9 + 1 = 19$, тоест Йосиф е трябвало да застане на място № 19, за да оцелее последен от общо 41 участници.

При $k > 2$ не е известна проста формула за J(n ; k). В оригиналната задача $k = 3$. За този случай има явна формула, която обаче съдържа дробна константа. Ето защо трябва да знаем константата с голяма точност, за да пресметнем J(n ; 3) при големи n. Понеже $n = 41$ е сравнително малко число, можем да решим задачата от легендата, като проследим номерата на убитите: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 1, 5, 10, 14, 19, 23, 28, 32, 37, 41, 7, 13, 20, 26, 34, 40, 8, 17, 29, 38, 11, 25, 2, 22, 4, 35, 16. Оцелява № 31, т.е. J(41 ; 3) = 31. С други думи, Йосиф е заел място № 31. Всъщност според легендата оцеляват двама — Йосиф и приятелят му Яков. Това е възможно само ако двамата са застанали на места № 31 и № 16.