Задачата с фалшивата монета и везната

Следната задача има много постановки, преформулирани през годините. Най-общо казано, нека са дадени няколко монети, сред които има една фалшива. С колко най-малко претегляния можем да намерим фалшивата монета, ако разполагаме само с везна?

Понякога е удобно да обърнем задачата: Кой е най-големият брой монети, измежду които фалшивата монета може да бъде разпозната с не повече от n претегляния?

Пояснения:

1) Фалшива монета — монета, която има различна маса и плътност от истинските монети, но на външен вид е неразличима от тях.

2) Везна — с нея можем да сравняваме теглата на две съвкупности от монети, но не можем да определим колко точно тежат. Без ограничение приемаме, че на двете блюда слагаме винаги равен брой монети.

Ще разгледаме няколко постановки на задачата, различаващи се по сведенията за монетите. Започваме с един прост пример.

Пример: Разполагаме с три монети, една от тях е фалшива. Колко най-малко претегляния са необходими, за да идентифицираме фалшивата монета, ако:

а) не знаем дали фалшивата монета е по-лека, или по-тежка от останалите;

б) знаем, че тя е по-лека от другите монети?

Решение: Нека за удобство означим монетите с M_1 , M_2 и M_3.

а) Избираме произволно две монети, нека това да са M_1 и M_2. Претегляме ги на везната.

— Ако M_1 и M_2 тежат еднакво, то M_3 е фалшивата монета.

— Ако M_1 и M_2 се различават по тегло, то M_3 е истинска монета. Претегляме M_1 и M_3 .

— Ако M_1 и M_3 имат еднакви тегла, то M_2 е фалшивата монета.

— Ако M_1 и M_3 са с различни тегла, то M_1 е фалшивата монета.

Така решихме задачата с две претегляния. Очевидно е, че едно претегляне не е достатъчно: ако двете претеглени монети се различават по тегло, една от тях е фалшива, но не знаем коя.

б) Ако обаче знаем, че фалшивата монета е по-лека от останалите, то задачата може да се реши с едно претегляне. Претегляме две произволно избрани монети, например M_1 и M_2.

— Ако $M_1 = M_2$, то M_3 е фалшивата монета.

— Ако $M_1 < M_2$, то M_1 е фалшивата монета.

— Ако $M_1 > M_2$, то M_2 е фалшивата монета.

Като се основаваме на втория случай от горния пример, ще докажем следното твърдение.

Твърдение 1: Ако има само една фалшива монета и тя е по-лека от истинските монети, то можем да я разпознаем с n или по-малко претегляния с везната тогава и само тогава, когато броят на всички монети не надхвърля 3^n.

Доказателство: с математическа индукция по n.

База: при $n = 1$. Тогава $3^n = 3^1 = 3$, тоест имаме най-много три монети. Вече показахме в горния пример, че едно претегляне е достатъчно за три монети. Този брой е максимален, тоест едно претегляне не стига, когато монетите са четири: ако ги претеглим две срещу две, ще разберем само коя група от две монети съдържа фалшивата монета (по-леката група); а ако претеглим една монета срещу една друга, то при равенство на теглата ще знаем само, че фалшивата монета е сред останалите две.

Индуктивна стъпка: Нека твърдението е вярно при $n = k$ за някое естествено число k, тоест 3^k е най-големият брой монети, сред които можем да разпознаем една фалшива (по-лека) с не повече от k претегляния. Ще докажем, че твърдението е вярно и при $n = k + 1$.

Нека имаме 3^{k+1} монети. Ще покажем, че фалшивата монета сред тях може да бъде открита с не повече от $k + 1$ претегляния. За целта разделяме монетите на три групи, всяка от които има по 3^k монети. Да означим групите с G_1, G_2 и G_3, като $|G_i| = 3^k,\ i = 1,2,3$. Претегляме две произволно избрани групи, например G_1 и G_2.

— Ако G_1 и G_2 тежат еднакво, то фалшивата монета се намира в G_3.

— Ако G_1 и G_2 се различават по тегло, то фалшивата монета се намира в по-леката група.

Продължаваме да търсим фалшивата монета в една от трите групи. Тъй като всяка група съдържа 3^k монети, то са достатъчни още k претегляния според индуктивното предположение. Заедно с претеглянето, описано по-горе, стават $k + 1$ претегляния.

Ясно е, че това решение работи и при по-малко от 3^{k+1} монети: след всяко теглене остават по-малко монети, отколкото след същия брой претегляния при начален брой 3^{k+1}, ето защо по-бързо (тоест с не повече претегляния) стигаме до "група" от една монета — фалшивата.

Обратно, ако монетите са повече от 3^{k+1}, то $k + 1$ претегляния не стигат. Наистина, както и да разделим монетите на три групи (две групи ще бъдат претеглени, а третата група ще остане встрани от везната), фалшивата монета може да се окаже във всяка от групите, включително в най-голямата от тях, а тя съдържа повече от 1/3 от общия брой монети, тоест повече от 3^k монети. От индуктивното предположение е известно, че са необходими повече от k претегляния след първото, тоест повече от $k + 1$ претегляния общо.

Не можем да разделяме монетите на повече от три групи при всяко отделно теглене: едната група се поставя върху лявото блюдо, другата — върху дясното, а третата група остава встрани от везната. Везната връща един от три възможни резултата: по-лека е първата група, по-лека е втората група или първата и втората група са еднакво тежки. Всеки от резултатите посочва къде се намира фалшивата монета — в първата, втората или третата група съответно.

■

Сега ще усложним постановката на задачата. Нека монетите са два вида — бели и черни. Ако фалшивата монета е бяла, тя е по-лека, а ако е черна — тя е по-тежка от останалите.

Лема 1: Ако $|a - b| \leq 1$, където a, b са бройките съответно на черните и белите монети, то 3^n е най-големият брой монети, сред които има една фалшива и тя може да бъде открита с не повече от n претегляния.

Доказателство: Че има решение с n претегляния, се доказва с индукция по n.

База: при $n = 1$. Тогава $3^n = 3^1 = 3$, тоест имаме най-много три монети. Не е ограничение да смятаме, че те са две черни и една бяла. Претегляме двете черни монети. Ако тежат еднакво, то бялата монета е фалшива, в противен случай фалшива е по-тежката от двете черни монети.

Индуктивна стъпка: Нека твърдението е вярно при $n = k$ за някое естествено число k, т.е. 3^k е най-големият брой монети (бели и черни), сред които можем да познаем една фалшива. Ще покажем, че фалшивата монета измежду общо 3^{k+1} монети (бели и черни) може да бъде открита с не повече от $k+1$ претегляния. Без ограничение приемаме, че черните монети са с една повече от белите, тоест има $\frac{3^{k+1}+1}{2}$ черни и $\frac{3^{k+1}-1}{2}$ бели монети. Разделяме монетите на три групи с равен брой монети — по 3^k във всяка група. Нека означим групите с G_1, G_2 и G_3, като $|G_i| = 3^k,\ i = 1,2,3$. По-подробно:

$$G_1 = \left\{ \frac{3^k+1}{2} \text{ черни и } \frac{3^k-1}{2} \text{ бели монети} \right\};$$

$$G_2 = \left\{ \frac{3^k+1}{2} \text{ черни и } \frac{3^k-1}{2} \text{ бели монети} \right\};$$

$$G_3 = \left\{ \frac{3^k-1}{2} \text{ черни и } \frac{3^k+1}{2} \text{ бели монети} \right\}.$$

На първата стъпка претегляме G_1 и G_2. Ако се окажат с еднакви тегла, то фалшивата монета се намира в G_3, след което прилагаме индуктивната хипотеза. Достатъчни са още k тегления, които заедно с първото теглене правят общо $k+1$ претегляния. Ако ли пък G_1 и G_2 се окажат с различни тегла, можем без ограничение да приемем, че G_1 е по-тежката група; тогава има само две възможности: фалшивата монета да е в G_1 и да е черна или да е в G_2 и да е бяла. Събираме накуп черните монети от G_1 и белите монети от G_2:

$$\frac{3^k+1}{2} + \frac{3^k-1}{2} = 3^k.$$

Тоест получаваме множество от 3^k монети. Към него прилагаме индуктивното предположение: оттук нататък са достатъчни още k тегления, които заедно с първото теглене правят общо $k+1$ претегляния. С това индуктивното доказателство е завършено.

Другата част от твърдението — за максималността на броя монети 3^n — също е вярна, но доказателството не е индуктивно. Причината е, че групата, оставаща след първото теглене, може да не удовлетворява неравенството $|a-b| \leq 1$. Идеята на доказателството (която важи без предположението $|a-b| \leq 1$) е следната: Каквото и претегляне да направим, резултатът е, че остава за претърсване една от следните три групи:

1) черните монети върху лявото блюдо и белите монети върху дясното блюдо;

2) черните монети върху дясното блюдо и белите монети върху лявото блюдо;

3) черните и белите монети, които не са участвали в претеглянето.

Тъй като резултатът от претеглянето не зависи от стратегията, а от късмета, винаги е възможно да попаднем в най-лошия случай — да остане за претърсване най-голямата от трите групи. Тя съдържа поне 1/3 от всички монети, тоест размерът на групата намалява не повече от 3 пъти при всяко теглене. Накрая трябва да остане една монета (фалшивата). Сега вече е ясно, че с n претегляния, тоест с n деления на 3, можем да стигнем от началния брой до единицата тогава и само тогава, когато началният брой монети не надхвърля 3^n.

∎

Забележка: Оказва се, че n претегляния са достатъчни и без неравенството $|a-b| \leq 1$. При всяко теглене разделяме всеки цвят монети на три еднакво големи групи. Делението може да не е напълно точно (заради закръглянето), затова е нужен по-подробен анализ.

Когато сме разбрали, че една монета е истинска, можем да я използваме, за да изпробваме други монети. Такава монета (за която знаем, че е истинска) ще наричаме пробна монета.

Пример: Ако имаме четири монети, можем да открием фалшивата монета с две тегления. Отделяме пробната монета, от останалите три претегляме две. Ако тежат еднакво, фалшива е третата монета; дали е по-лека, или по-тежка, разбираме, като я сравним с пробната монета. Ако двете избрани монети тежат различно, сравняваме по-леката от тях с пробната монета: ако сравняваната монета излезе по-лека отново, значи тя е фалшива (и е по-лека от другите); ако пък е еднаква по тегло с пробната монета, значи фалшива (и по-тежка) е другата от двете първоначално избрани монети.

С едно претегляне не можем да намерим фалшивата сред четири монети. Това се доказва с разглеждане на случаи. Ако претеглим две монети и теглата им се окажат равни, ще узнаем само това, че фалшивата е измежду останалите три. Дори ако някоя от тях е пробната монета, все пак остават поне две монети, сред които е фалшивата, но не знаем коя точно е тя. Ако пък сложим две монети на едното блюдо и две на другото, едното блюдо ще натежи, но няма как да разберем дали е фалшива (по-лека) една от монетите на по-лекото блюдо, или е по-тежка една от монетите на по-тежкото блюдо. За това е нужно второ претегляне.

С две претегляния не можем да намерим фалшивата сред пет монети (тоест четири монети е максималният брой). Отново разглеждаме случаи. Ако с първото претегляне сравним пробната монета с една от другите, те може да се окажат с равни тегла; тогава ще знаем само, че избраната монета е истинска, но ще останат три други (заедно с пробната стават четири), а имаме само още едно претегляне, което е недостатъчно според доказаното в предишния абзац. Ако с първото претегляне сравним две монети, различни от пробната, може да се случи така, че те да тежат еднакво. Тогава фалшивата монета е сред оставащите две монети. Няма смисъл да ги сравняваме една с друга при второто теглене: със сигурност ще бъдат с различни тегла, но няма да знаем коя е фалшива — по-леката или по-тежката. Ако пък при второто теглене сравним пробната монета с една от оставащите две монети и везната застане в равновесие, ще знаем само, че е фалшива единствената монета, неучаствала в тегленията, но няма да знаем дали тя е по-лека, или по-тежка.

И така, четири е максималният брой монети, сред които има една фалшива и една пробна и можем да открием фалшивата монета с не повече от две претегляния, като определим още дали е по-лека, или по-тежка от истинските монети.

Горните разсъждения могат да се обобщят за n претегляния, но доказателството е трудно, поради което го пропускаме.

Лема 2: Разполагаме с няколко монети, точно една от които е фалшива, но не знаем дали тя е по-лека, или по-тежка. Освен това за една от монетите знаем, че е истинска. Тогава $\frac{3^n-1}{2}$ е максималният брой монети, така че с n претегляния да определим фалшивата и да кажем дали тя е по-тежка, или по-лека от останалите ($n \geq 2$).

Ако нямаме пробна монета, трябва или да намалим броя на монетите, или да се откажем от изискването за разпознаване дали фалшивата монета е по-лека, или по-тежка от другите.

Твърдение 2: $\frac{3^n-3}{2}$ е максималният брой монети, от които точно една е фалшива, така че с n претегляния можем да определим коя е фалшивата монета и дали е по-лека, или по-тежка от останалите. Ако искаме да разпознаем само коя монета е фалшива, без да я определяме като по-лека или по-тежка, тогава максималният брой монети е $\frac{3^n-1}{2}$.