Изпит по избираемата учебна дисциплина "Избрани глави от комбинаториката и теорията на графите" (летен семестър на 2020/2021 уч. г. в СУ, ФМИ)

Задача 1. Докажете, че измежду биномните коефициенти

$$\binom{n}{0},\ \binom{n}{1},\ \binom{n}{2},\ \binom{n}{3},\ \ldots\ ,\ \binom{n}{n}$$

не може да има равен брой четни и нечетни.

Задача 2. Колко са пермутациите без повторение на числата $1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n,$ в които пермутации точно k елемента са по-големи от всички предишни? Числата n и k са цели и $1 \leq k \leq n$.

Забележка: Първият елемент се смята за по-голям от всички предишни.

Упътване: Разгледайте няколко случая за последния елемент на пермутацията и съставете рекурентно уравнение за броя на пермутациите.

Задача 3 (от предварителния кръг на Румънската олимпиада по математика през 1989 г.). Дадена е редицата: $a_0 = a_1 = 1,\quad \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, a_{n-k} = 2^n\, a_n$ за всяко цяло число $n \geq 0$. Намерете затворена формула за общия член.

Задача 4. Дадени са n предмета с тегла $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ — реални положителни числа; дадено е и реално число $\epsilon > 0$. Като свържем двойките предмети с близки тегла, получаваме неориентиран граф. Върхове на графа са предметите, а ребра — връзките между предметите. По-точно, върховете на графа са индексите на предметите, тоест числата $1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ ,\ n$. Между върховете $i \neq j$ има ребро тогава и само тогава, когато $|x_i - x_j| < \epsilon$.

Броят на номерираните графи от описания вид да се пресметне като явна функция на n, когато $x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots\ ,\ x_n$ и ϵ пробягват всички реални положителни числа и $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Това, че върховете на графите са номерирани, означава, че върховете са различими, тоест изоморфните графи се броят за различни.

Задача 5. Латински правоъгълник се нарича всеки правоъгълник с r реда и n стълба, $r \leq n$, във всяка клетка на който е записано едно от числата $1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ ,\ n,$ като във всеки ред и във всеки стълб числата са две по две различни. Докажете, че всеки латински правоъгълник от тип $r \times n$, за който $r < n$, може да бъде допълнен до латински правоъгълник $(r+1) \times n$ чрез добавяне на ред и попълването му с числата $1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ ,\ n$ без промяна на числата в старите r реда.

Задача 6. Намерете пораждащата функция на редицата на положителните нечетни числа. С други думи, предложете затворена формула за безкрайната сума

$$f(x) = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots + (2n+1)x^n + \cdots$$

Оценката = 1 + точките. Всяка пълно решена задача носи 1 точка.

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Според едно следствие от теоремата на Люка има точно 2^k нечетни сред числата

$$\binom{n}{0},\ \binom{n}{1},\ \binom{n}{2},\ \binom{n}{3},\ \ldots\ ,\ \binom{n}{n},$$

където k е броят на единиците в двоичното представяне на n. Да допуснем, че сред тези биномни коефициенти има равен брой четни и нечетни числа. Като изразим общия им брой по два начина, получаваме равенството $n+1 = 2^k + 2^k$, откъдето $n = 2^{k+1} - 1 = \underbrace{111\ldots111}_{k+1\text{ единици}}{}_{(2)}$ съдържа $k+1$ единици, което е противоречие.

Задача 2. Нека $f(n\,;\,k)$ е броят на пермутациите без повторение на числата $1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n$, в които пермутации точно k елемента са по-големи от всички предишни.

Първи случай: на последно място стои числото n. То е по-голямо от всички други числа; измежду останалите $n-1$ елемента трябва да има точно $k-1$, по-големи от всички преди тях. Затова броят на тези пермутации е $f(n-1\,;\,k-1)$.

Втори случай: последният елемент на пермутацията не е числото n. Тогава той не е по-голям от всички предишни елементи: между тях е числото n. Сред тези $n-1$ елемента (без последния) трябва да има точно k, които са по-големи от всички предишни. Броят на тези пермутации е $(n-1)\,.\,f(n-1\,;\,k)$, като множителят $n-1$ идва от това, че за последния елемент съществуват $n-1$ възможности — всяко от числата $1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n-1$.

Следователно f удовлетворява уравнението $f(n\,;\,k) = f(n-1\,;\,k-1) + (n-1)\,.\,f(n-1\,;\,k)$. За да не се получат недопустими стойности на аргументите в дясната страна, трябва $1 < k < n$.

Ако $1 = k = n$, то отговорът е очевиден: $f(1\,;\,1) = 1$, защото в този случай има единствена пермутация — редицата от един член, съдържаща само числото 1. Това число е по-голямо от всички предишни членове, понеже няма такива.

Ако $1 = k < n$, то първият случай е невъзможен: както първият елемент на пермутацията, така и числото n са по-големи от всички предишни членове, тоест $k \geq 2$, освен ако числото n стои едновременно на първо и на последно място, но това също е невъзможно, тъй като $n > 1$. И така, при $1 = k < n$ остава само второто събираемо и рекурентното уравнение приема вида: $f(n\,;\,1) = (n-1)\,.\,f(n-1\,;\,1)$. След развиване на уравнението намираме $f(n\,;\,1) = (n-1)!$.

Ако $1 < k = n$, то вторият случай е невъзможен: щом всеки елемент е по-голям от всички предишни, то пермутацията съвпада с редицата $1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n$. Има само една пермутация, значи $f(n\,;\,n) = 1$. Същия извод получаваме и ако преработим уравнението, като премахнем второто събираемо: $f(n\,;\,n) = f(n-1\,;\,n-1)$. Развиваме: $f(n\,;\,n) = f(1\,;\,1) = 1$.

Получените гранични стойности и рекурентното уравнение показват, че $f(n\,;\,k) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ са числата на Стирлинг от първи род, без знак.

Задача 3. Пресмятаме първите няколко члена на редицата и лесно забелязваме, че $a_n = \dfrac{1}{n!}\cdot$ Доказваме това предположение с помощта на математическа индукция.

Задачата може да се реши и по друг начин — с пораждаща функция. Нека $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$.

Системата от рекурентно уравнение и начални условия за редицата се превръща в система от функционално уравнение и гранични условия за функцията: $f^2(x) = f(2x)$, $f(0) = f'(0) = 1$. Тази система има единствено решение: $f(x) = e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, откъдето намираме $a_n = \dfrac{1}{n!}\cdot$

Решението f на системата от функционално уравнение и гранични условия за функцията се намира лесно с помощта на налучкване. Щом удвояване на аргумента на f води до повдигане на функционалната стойност на втора степен, то f трябва да е показателна функция, тоест $f(x) = c^x$ за някое $c > 0$. Изискването $f(0) = 1$ се изпълнява от всяко $c > 0$, защото $c^0 = 1$. Обаче $f'(x) = c^x \ln c$, затова изискването $f'(0) = 1$, тоест $\ln c = 1$, се изпълнява само от $c = e$.

Истинският проблем тук не е да се налучка решението f, което има достатъчно просто аналитично представяне. Проблемът е дали системата от трите изисквания към функцията f има единствено решение (при повече решения няма да е ясно дали търсената функция $f(x)$ е тъкмо e^x). В задачи от този тип такъв проблем не може да възникне. Отнапред е сигурно, че системата от изисквания към f притежава единствено решение (поне в множеството на функциите $f(x)$, аналитични в околност на точката $x = 0$), защото тази система е равносилна на системата от изисквания към редицата, а тя определя редицата еднозначно. Действително, рекурентното уравнение може да се реши относно a_n, т.е. всеки член a_n е еднозначно определен от предходните членове при $n \geq 2$, а началните условия еднозначно определят a_n при $n \leq 1$.

Описаното разсъждение може да се приложи към всякакви функционални уравнения, получени в процеса на решаване на рекурентно уравнение.

Можем да решим функционалното уравнение, без да прибягваме до подобни съображения. Заместваме x с $\dfrac{x}{2}$:

$$f(x) = f^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

Заради повдигането на квадрат е сигурно, че f приема само неотрицателни стойности. Затова

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = f^{1/2}(x).$$

По индукция следва, че

$$f\left(\frac{x}{2^k}\right) = f^{1/2^k}(x), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

В това равенство нека допустимото число x е произволно, но фиксирано, а k да бъде променливо, като оставяме $k \to \infty$. За удобство полагаме $y = f(x)$, като y също е фиксирано. Следователно равенството приема вида

$$f\left(\frac{x}{2^k}\right) = y^{1/2^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Логаритмуваме и изразяваме $\ln\ y$, та y да остане самò в едната страна на равенството:

$$\frac{\ln\ f\left(\dfrac{x}{2^k}\right)}{\dfrac{1}{2^k}} = \ln\ y, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

За удобство полагаме $z = \dfrac{x}{2^k}$; величината z ще бъде променлива и ще клони към нула.

$$\frac{\ln\ f(z)}{z} = \frac{\ln\ y}{x}.$$

Извършваме граничен преход:

$$\lim_{z \to +0} \frac{\ln\ f(z)}{z} = \frac{\ln\ y}{x}.$$

Естествено, в лявата страна z клони към нула не чрез произволни (положителни) стойности, а само чрез редицата от стойности от полагането. Но както ще се убедим, границата съществува независимо от избраната редица от стойности на z.

Понеже $f(0) = 1,$ то $\ln\, f(0) = \ln\, 1 = 0$ и последното равенство може да се преработи тъй:

$$\lim_{z\to 0} \frac{\ln\, f(z) - \ln\, f(0)}{z - 0} \;=\; \frac{\ln\, y}{x}\cdot$$

От определението за производна:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\, \ln\, f(z)\,\Big|_{\,z\,=\,0} \;=\; \frac{\ln\, y}{x}\cdot$$

Диференцираме:

$$\frac{f'(0)}{f(0)} \;=\; \frac{\ln\, y}{x}\cdot$$

Заместваме $f(0) = 1$ и $f'(0) = 1$:

$$1 \;=\; \frac{\ln\, y}{x}\cdot$$

Като решим това уравнение относно $y = f(x),$ намираме търсената функция:

$$y = f(x) = e^x.$$

Задача 4. Можем да опишем графа, като за всеки връх j зададем множеството от върхове, с които е свързан. Понеже графът е неориентиран, има опасност да се получи противоречие в тази информация, например връх № 1 да е свързан с № 2, а връх № 2 да не е свързан с № 1. За да избегнем тази опасност, за всеки връх задаваме само върховете, които са свързани с него и имат индекс, по-голям от неговия:

$$A_j = \Big\{\; j \;\Big\} \bigcup \Big\{\; i\!\in\!\mathbb{N} \;\Big|\; j < i \leq n, \quad |x_i - x_j| < \epsilon \;\Big\}.$$

Елементът j е добавен към множеството A_j изкуствено — с цел то да не бъде празно. Тъй като графът не съдържа примки, то за построяването му е важно само множеството $A_j \Big\backslash \Big\{\; j \;\Big\}.$ То може да бъде празно — когато върхът j не е свързан с никой връх $i > j.$ Но ако не е празно, то съдържа редица от последователни цели числа с първи член $j + 1,$ защото предметите са наредени по тегло. Изкуственото добавяне на j не променя това свойство, а само гарантира, че множеството A_j не е празно. Накратко, множеството има вида

$$A_j = \Big\{\; j\;,\; j+1\;,\; j+2\;,\; \ldots\;,\; a_j \;\Big\}, \text{ където } a_j = \max\, A_j\,.$$

Максимумът е добре определен, понеже множеството е непразно. Той представлява цяло число, което лежи в интервала от 1 до n включително. От определението му се вижда, че $a_j \geq j,$ като равенство има точно когато върхът j не е свързан с никой връх $i > j.$ В частност $a_n = n.$

От това, че предметите са наредени по тегла във възходящ ред, следва още, че

$$a_1 \;\leq\; a_2 \;\leq\; a_3 \;\leq\; \ldots \;\leq\; a_n\,.$$

Да разгледаме начупена линия, която свързва последователно точките

$$(0\,;\,0),\;\; (a_1\,;\,0),\;\; (a_1\,;\,1),\;\; (a_2\,;\,1),\;\; (a_2\,;\,2),\;\; \ldots\;\;,\;\; (a_{n-1}\,;\,n-1)\;,\;\; (a_n\,;\,n-1)\;,\;\; (a_n\,;\,n).$$

Върховете ѝ имат целочислени неотрицателни координати, а звената ѝ са водоравни и отвесни отсечки. От построението на линията и от неравенствата $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n$ следва, че на всеки ход правим стъпка надясно или стъпка нагоре; започваме разходката от точката $(0\,;\,0)$ и я завършваме в точката $(a_n\,;\,n)$, която всъщност е $(n\,;\,n)$. От неравенствата $a_j \geq j$ следва, че във всеки миг от разходката се намираме върху или под ъглополовящата на първи квадрант.

Като обърнем реда на разсъжденията, се убеждаваме, че на всяка такава начупена линия съответства редица с n члена (максимумите на множествата), на нея — редица от n множества, а на нея — възможен граф на близостта между теглата на n предмета. Тази биекция показва, че броят на интересуващите ни графи е равен на броя на начупените линии от описания вид — числото на Каталан $\dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

Задача 5. Да построим двуделен неориентиран граф с $n+n$ върха. Върховете от единия дял са стълбовете на латинския правоъгълник $r \times n$. Върховете от другия дял са целите числа от 1 до n включително, с които е попълнен латинският правоъгълник. Свързваме чрез ребро стълб № i с числото j, ако и само ако числото j не е написано в стълб № i на правоъгълника.

Тъй като всеки стълб съдържа r числа, той е свързан чрез ребро с другите $n-r$ числа. Обратно, всяко число се среща по веднъж във всеки ред, общо r пъти в целия правоъгълник; а тъй като се среща най-много по един път във всеки стълб, то е написано точно в r стълба, следователно е свързано точно с останалите $n-r$ стълба. Накратко, всички върхове на графа са от една и съща степен $n-r > 0$ (защото $r < n$), тоест графът е регулярен.

Едно следствие от теоремата на Хол за сватбите гласи, че всеки регулярен двуделен граф от положителна степен притежава съвършено съчетание. Да вземем едно съвършено съчетание в нашия граф. Всяко ребро от съчетанието ни дава един запис на число от новия ред — № $r+1$: ако реброто свързва стълб № i с числото j, тогава пишем числото j в стълб № i на новия ред. От определението на съвършено съчетание следва, че всяка от клетките в новия ред е попълнена с точно едно число и всяко число е написано точно един път в новия ред. Това, че новият ред не създава повторения в стълбовете на правоъгълника $(r+1) \times n$, следва от построението на графа: новото число във всеки стълб е измежду числата, които досега са липсвали в него.

Задачата е решена. От нея следва, че за всяко цяло положително число n съществува латински квадрат $n \times n$. Започваме от латински правоъгълник $1 \times n$ — един ред, попълнен с произволна пермутация на числата от 1 до n. Добавяме редове един по един и получаваме латински правоъгълници $2 \times n$, $3 \times n$ и т.н. Накрая получаваме латински квадрат $n \times n$.

Латинските правоъгълници имат практически приложения. Например r контрольори трябва да изпробват качеството на n нови модела автомобили ($r < n$). Всеки контрольор изпробва само една кола в даден миг и всяка кола се изпробва само от един контрольор във всеки момент. Всяка проба трябва да е обстойна, затова продължава цял ден. Колко дена най-малко са нужни, за да може всеки контрольор да изпробва всяка кола? Очевидно поне n дена, но достатъчни ли са? Да, достатъчни са. Нека построим латински правоъгълник $r \times n$. Ако в пресечната клетка на ред № i и стълб № j стои числото k, то контрольор № i изпробва модел № j през ден № k.

Решението на всяко судоку е латински квадрат от девети ред.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	8	9	1	2	3	4	5	6
4	5	6	7	8	9	1	2	3
3	1	2	8	4	5	9	6	7
6	9	7	3	1	2	8	4	5
8	4	5	6	9	7	3	1	2
2	3	1	5	7	4	6	9	8
9	6	8	2	3	1	5	7	4
5	7	4	9	6	8	2	3	1

Задача 6. Пораждащата функция на нечетните положителни числа се намира с помощта на формулата за сбора на безкрайна геометрична прогресия.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 2x\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 2x\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)' + \sum_{n=0}^{\infty} x^n =$$

$$= 2x\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 2x\left(\frac{1}{1-x}\right)' + \frac{1}{1-x} = \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^2}\,.$$