Решения на задачите на II поток от изпита на 05.02.2013 г.

Зад. 1 Нека $P(x)$ и $Q(x)$ са предикати върху един и същи краен домейн A. Докажете или опровергайте, че

а) $\forall x(P(x) \lor Q(x)) \equiv (\forall x(P(x))) \lor (\forall x(Q(x)))$ **б)** $\forall x(P(x) \land Q(x)) \equiv (\forall x(P(x))) \land (\forall x(Q(x)))$

Решение: Твърдение **а)** не е вярно. Нека $A = \{a, b\}$. Нека $P(a) = Q(b) = \text{True}$ и $P(b) = Q(a) = \text{False}$. Очевидно

$$\forall x(P(x) \lor Q(x)) \equiv (\underbrace{P(a)}_{\text{True}} \lor \underbrace{Q(a)}_{\text{False}}) \land (\underbrace{P(b)}_{\text{False}} \lor \underbrace{Q(b)}_{\text{True}}) \equiv \text{True} \land \text{True} \equiv \text{True}$$

докато

$$(\forall x(P(x))) \lor (\forall x(Q(x)) \equiv (\underbrace{P(a)}_{\text{True}} \land \underbrace{P(b)}_{\text{False}}) \lor (\underbrace{Q(a)}_{\text{False}} \land \underbrace{Q(b)}_{\text{True}}) \equiv \text{False} \lor \text{False} \equiv \text{False}$$

Твърдение **б)** е вярно. Нека $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Тогава

$$\begin{aligned}
&\forall x(P(x) \land Q(x)) \equiv \\
&(P(a_1) \land Q(a_1)) \land (P(a_2) \land Q(a_2)) \land \ldots (P(a_n) \land Q(a_n)) \equiv \quad \textit{(комутативност, асоциативност)} \\
&P(a_1) \land P(a_2) \land P(a_n) \land Q(a_1) \land Q(a_2) \ldots Q(a_n) \equiv \\
&((P(a_1) \land P(a_2) \land P(a_n)) \land (Q(a_1) \land Q(a_2) \ldots Q(a_n)) \equiv \\
&(\forall x(P(x))) \land (\forall x(Q(x)))
\end{aligned}$$

□

Зад. 2 Нека $A = \{a, b\}$, $B = 2^A$ и $C = 2^B$. Напишете в явен вид множествата B и C.

Решение: $B = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. $C = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{a, b\}\}, \{\emptyset, \{a\}\}, \{\emptyset, \{b\}\}, \{\emptyset, \{a, b\}\}, \{\{a\}, \{b\}\}, \{\{a\}, \{a, b\}\}, \{\{b\}, \{a, b\}\}, \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}, \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}, \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}, \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}, \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}\}$.

□

Зад. 3 Нека $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Нека $R \subseteq A \times A$ е релация на еквивалентност, която има 4 класа на еквивалентност A_1, A_2, A_3 и A_4, такива че $|A_i| = i$ за $1 \leq i \leq 4$.

а) Определете $|R|$.

б) Колко такива релации има?

Решение, а): Графът на R се състои от четири слабо свързани компоненти, всяка от които е пълен ориентиран граф с примки, като всички възможни примки присъстват. $|R|$ е общият брой на ребрата. Всяка от споменатите силно свързани компоненти съответства на точно един клас на еквивалентност. Известно е, че пълен ориентиран граф с всички възможни примки на n върха има точно n^2 ребра. Тогава $|R| = 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 30$.

Решение, б): Да определим R е същото като да определим кои елементи от A са в A_1, A_2, A_3 и A_4, като мощностите на четирите множества са фиксирани. Отговорът е мултиномният коефициент

$$\frac{10!}{4! \times 3! \times 2! \times 1!} = 12\,600$$

□

Зад. 4 Нека A е произволно n-елементно множество. Отговорете с кратка обосновка на следните въпроси.

а) Колко частични функции с домейн A и кодомейн A има?

б) Колко тотални функции с домейн A и кодомейн A има?

в) Колко инекции с домейн A и кодомейн A има?

г) Колко сюрекции с домейн A и кодомейн A има?

д) Колко биекции с домейн A и кодомейн A има?

Решение:

б) Това са комбинаторни конфигурации с наредба и повторение с големина n над опорно множество с мощност n. Както знаем, $|K_{H,\Pi}(n,n)| = n^n$.

а) Нека x е елемент, непринадлежащ на A, и нека $A' = A \cup \{x\}$. Съществува очевидна биекция между множеството на частичните функции с домейн A и кодомейн A и множеството на тоталните функции с домейн A и кодомейн A'. Следователно, броят на въпросните частичните функции е същият като броят на тоталните функции с домейн A и кодомейн A'. С разсъждение като в **а)** извеждаме, че отговорът е $|K_{H,\Pi}(n, n+1)| = (n+1)^n$.

в) Това са комбинаторни конфигурации с наредба и без повторение с n над опорно множество с мощност n. Както знаем, $|K_H(n,n)| = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots (n-n+1) = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots (1) = n!$.

г) Използвайки комбинаторния принцип на вкючването и изключването, тривиално се извежда отговор $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^n$. От друга страна, лесно се показва, че тези функции са точно биекциите между A и A, така че отговорът може да се запише и като $n!$—щом функциите са биекции, то те са инекции и тогава прилагаме разсъжденията от **в)**. †

д) Както вече споменахме, броят на биекциите е $n!$.

□

Зад. 5 Колко целочислени решения има уравнението $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 177$, ако

а) $x_i \geq 0$ за $1 \leq i \leq 6$

б) $44 \geq x_i \geq 0$ за $1 \leq i \leq 6$

Решение, а): Това са комбинаторни конфигурации с големина 177 над опорно множество с мощност 6. Отговорът е $\binom{177+6-1}{6-1} = 1\,574\,397\,006$.

Решение, б): Ще използваме резултата от **а)**, като от множеството от конфигурациите премахваме "нарушителите", тоест решенията, при които поне едно x_i надхвърля 44. Нека B_i е множеството от решенията, в които x_i е нарушител, за $1 \leq i \leq 6$. Нека m е търсеният отговор. Очевидно

$$m = \left|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4} \cap \overline{B_5} \cap \overline{B_6}\right|$$

Нека $B_{i,j}$ е множеството от решенията, в които x_i и x_j са нарушители, за $1 \leq i < j \leq 6$. Нека $B_{i,j,k}$ е множеството от решенията, в които x_i, x_j и x_k са нарушители, за $1 \leq i < j < k \leq 6$. Очевидно няма как четири или повече променливи да са нарушители, понеже за да е нарушител, дадена променлива трябва да е поне 45, а 4×45 е 180, което надхвърля зададената сума 177. Съгласно принципа на включване и изключване,

$$\left|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4} \cap \overline{B_5} \cap \overline{B_6}\right| = 1\,574\,397\,006 - \sum_{1 \leq i \leq 6} |B_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq 6} |B_{i,j}| - \sum_{1 \leq i < j < k \leq 6} |B_{i,j,k}|$$

От най-общи съображения е ясно, че всички B_i-та са равномощни, също така всички $B_{i,j}$-та са равномощни и всички $B_{i,j,k}$-та са равномощни. Броят на B_i-тата е $\binom{6}{1} = 6$, броят на $B_{i,j}$-тата е $\binom{6}{2} = 15$, а броят на $B_{i,j,k}$-тата е $\binom{6}{3} = 20$. Тогава

$$m = 1\,574\,397\,006 - 6 \times |B_1| + 15 \times |B_{1,2}| - 20 \times |B_{1,2,3}|$$

†С комбинаторни разсъждения доказахме, че $n! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^n$.

Да намерим $|B_1|$. Броят на решенията, при които $x_1 \geq 45$, $x_1 + \ldots + x_6 = 177$ и $x_2, \ldots, x_6 \geq 0$, е същият като броят на решенията, при които $x_1, \ldots, x_6 \geq 0$ и $x_1 + \ldots + x_6 = 177 - 45 = 132$. С разсъждения като в **а)** извеждаме, че $|B_1| = \binom{132+6-1}{6-1} = 373\,566\,942$.

Да намерим $|B_{1,2}|$. Броят на решенията, при които $x_1, x_2 \geq 45$, $x_1 + \ldots + x_6 = 177$ и $x_3, \ldots, x_6 \geq 0$, е същият като броят на решенията, при които $x_1, \ldots, x_6 \geq 0$ и $x_1 + \ldots + x_6 = 177 - 2 \times 45 = 87$. С разсъждения като в **а)** извеждаме, че $|B_{1,2}| = \binom{87+6-1}{6-1} = 49\,177\,128$.

Да намерим $|B_{1,2,3}|$. Броят на решенията, при които $x_1, x_2, x_3 \geq 45$, $x_1 + \ldots + x_6 = 177$ и $x_3, x_5, x_6 \geq 0$, е същият като броят на решенията, при които $x_1, \ldots, x_6 \geq 0$ и $x_1 + \ldots + x_6 = 177 - 3 \times 45 = 42$. С разсъждения като в **а)** извеждаме, че $|B_{1,2,3}| = \binom{42+6-1}{6-1} = 1\,533\,939$.

Окончателно,

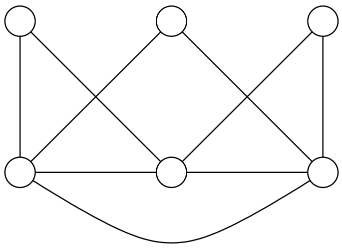
$$m = 1\,574\,397\,006 - 6 \times 373\,566\,942 + 15 \times 49\,177\,128 - 20 \times 1\,533\,939 = 39\,973\,494$$

□

Зад. 6 Група от n на брой студента, поне четирима на брой, се събира в очакване на изпита по Дискретни Структури. С пристигането си всеки студент или студентка се ръкува с някои свои колеги. Известно е, че всеки или всяка от тях се е ръкувал(а) с четен брой свои колеги. Вярно ли е, че непременно поне трима от тях са се ръкували с един и същи брой свои колеги? Вярно ли е, че непременно поне четирима от тях са се ръкували с един и същи брой свои колеги? Обосновете отговорите си.

Решение: Задачата е същата като задачата, в достатъчно голям граф (поне 4 върха) в който всеки връх е от четна степен, дали непременно има три върха от една и съща степен, и дали непременно има четири върха от една и съща степен.

Отговорът на втория въпрос е "не". Ето контрапример:



Отговорът на първия въпрос е "да". Да допуснем противното. Нека разгледаме произволен граф G с поне четири върха, всичките от четни степени. Първо разглеждаме случая, в който G няма изолирани върхове. Тогава възможните стойности на степените на върховете са от множеството $\{2, 4, \ldots, n-2\}$ при четно n и $\{2, 4, \ldots, n-1\}$ при нечетно n. Това множество има мощност $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$ и в двата случая, следователно броят на възможните различни стойности за степените е най-много $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$. Бидейки допуснали, че от коя да е степен има най-много два върха, имаме най-много $2 \times \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1 \right)$ върха общо. Но $2 \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 2 < n$ и за четно, и за нечетно n, а n е общият брой на върховете. Това противоречие отхвърля допускането за граф без изолирани върхове.

Сега да допуснем, че G има поне един изолиран връх. Но наличието на връх от степен 0 влече отсъствието на върхове от степен $n-1$, понеже, ако имаше връх от степен $n-1$, той би бил съсед и на върха от степен 0, който всъщност няма съседи. И така, ако n е нечетно, възможните стойности на степените на върховете са от множеството $\{0, 2, \ldots, n-3\}$. Това множество има мощност $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$ по същата причина, по която множеството $\{2, 4, \ldots, n-1\}$ при нечетно n има мощност $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$. С разсъждения като в предния параграф достигаме до противоречие. Накрая да допуснем, че n е четно. Тогава възможните стойности на степените на върховете са от множеството $\{0, 2, 4, \ldots, n-2\}$. Това множество има мощност $\frac{n}{2}$. Ние вече допуснахме, че от дадена степен няма повече от два върха. Лесно се вижда, че от всяка от тези степени, включително 0 и $n-2$, трябва да има <u>точно</u> два върха. От друга страна, невъзможно е да има два върха от степен 0 и връх от степен $n-2$. Това противоречие отхвърля допускането за граф с изолирани върхове. □

Зад. 7 Дадени са три отделни прости (без повтарящи се върхове) цикъла C_1, C_2 и C_3 с дължини съответно n_1, n_2 и n_3. От тези три цикъла правим един свързан граф чрез "залепянето" им във върхове, които след залепянето стават общи.

а) По колко начина може стане това, ако залепянето става в в точно един, общ и за трите цикъла, връх u?

б) По колко начина може да стане това, ако залепянето става в точно три върха u, v и w, всеки връх общ за точно два от циклите? Приемете, че $u \neq v \neq w \neq u$.

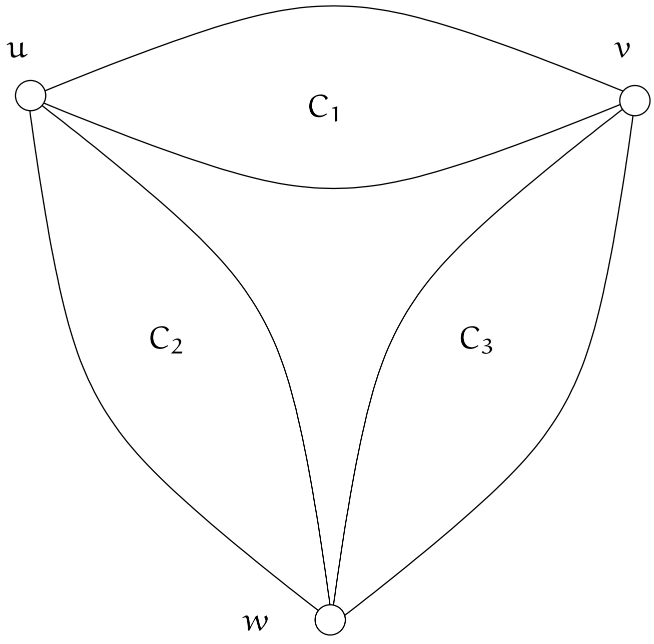
в) Нека G е произволен граф от подусловие **б)**. Колко прости цикъла има в G?

Решение:

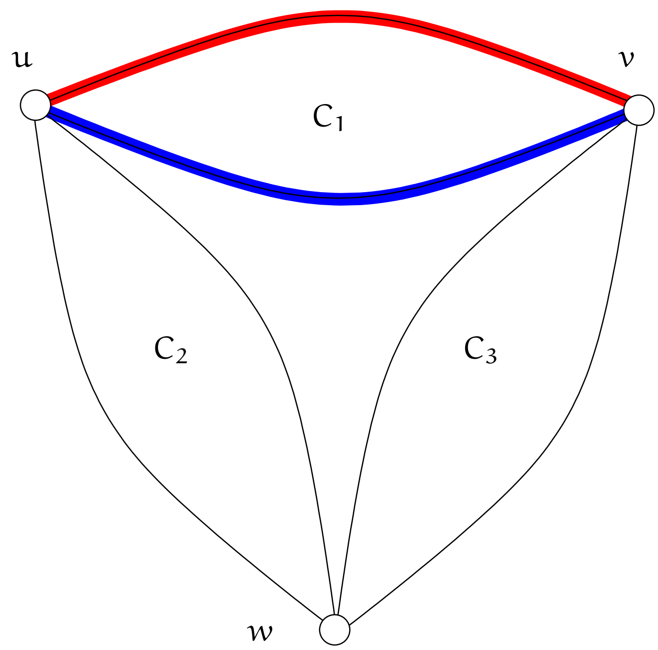
а) Задачата е същата като задачата, по колко начина можем да изберем един връх измежду n_1 върха, и независимо от това по по колко начина можем да изберем един връх измежду n_2 върха, и независимо от това по по колко начина можем да изберем един връх измежду n_3 върха. Очевидно отговорът е $n_1n_2n_3$.

б) Да си представим процеса на залепянето. Първо залепяме C_1 и C_2 в общ връх u, което може да стане по n_1n_2 начина. След това от C_3 избираме два върха v и w, такива че да залепим C_3 към C_1 във v и да залепим C_3 към C_2 в w. Избирането на v и w може да стане по $n_3(n_3 - 1)$ начина, защото това са различни върхове. След това изборът на връх от C_1, който да бъде залепен към C_3, тоест да стане връх v в C_1, може да стане по $n_1 - 1$ начина, защото един връх от C_1, а именно u, не може да бъде избран. Абсолютно аналогично, изборът на връх от C_2, който да стане общ за C_2 и C_3, може да стане по $n_2 - 1$ начина. Тъй като тези четири етапа от процеса на залепянето стават независимо, отговорът е $n_1n_2n_3(n_1-1)(n_2-2)(n_3-3)$. Фактът, че тази формула е симетрична по отношение на n_1, n_2 и n_3, отговаря на интуитивното ни разбиране, че за крайния отговор няма значение с кои два цикъла започва процеса на залепянето.

в) Да разгледаме графа от подусловие **б)**:



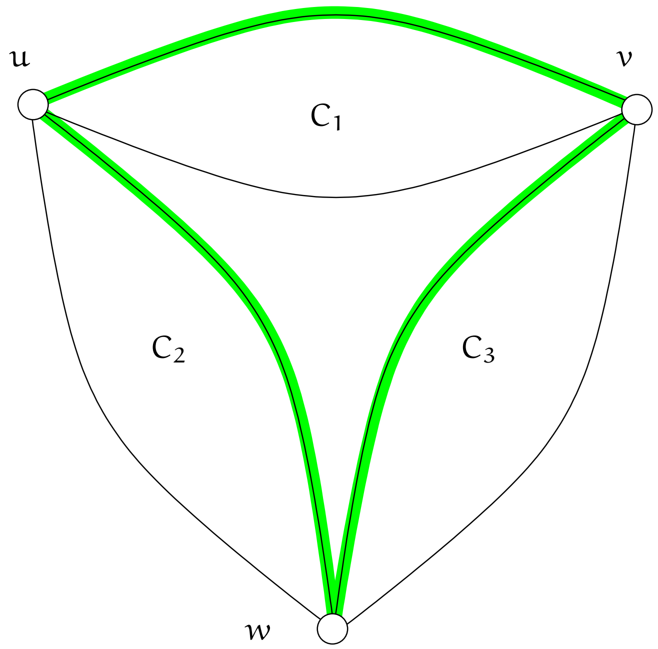
За цикъла C_1 можем да мислим като за два пътя с крайни върхове u и v, които два пътя са слепени един за друг в u и v. Да наречем тези два пътя, *сегментите на* C_1. Ето сегментите на C_1, маркирани в червено и синьо:



Напълно аналогично дефинираме сегментите на C_2 спрямо u и w и сегментите на C_3 спрямо v и w.

Очевидно е, че ребрата на G се разбиват съгласно принадлежността си към C_1, C_2 или C_3. Забелязваме, че е невъзможно прост цикъл в G да съдържа ребра от точно два цикъла измежду C_1, C_2 и C_3. Тогава всеки прост цикъл s в G:

- или съвпада с някой от C_1, C_2 или C_3, а това са 3 възможности,
- или съдържа ребра и от трите цикъла C_1, C_2 и C_3. В такъв случай s се състои от точно един сегмент на C_1, точно един сегмент на C_2 и точно един сегмент на C_3, залепени "кръгово" във върховете u, v и w. Ето един такъв пример:



В този случай имаме $2^3 = 8$ възможности, защото за всеки от C_1, C_2 и C_3 избираме точно единия сегмент, и тези три избора са независими един от друг.

Общо имаме $3 + 8 = 11$ различни прости цикъла.

$\square$

Зад. 8 Колко са булевите функции на n променливи, които имат стойност 1 върху даден входен вектор $\widetilde{\alpha}$ с тегло k и върху всички вектори $\widetilde{\beta}$, такива че $\widetilde{\alpha} \preccurlyeq \widetilde{\beta}$?

Решение: Всички булеви вектори с дължина n са 2^n. От това количество да извадим броя на векторите $\widetilde{\beta}$, такива че $\widetilde{\alpha} \preccurlyeq \widetilde{\beta}$. Този брой е 2^{n-k}, тъй като във всеки такъв вектор $\widetilde{\beta}$, k на брой позиции са фиксирани със стойност 1 и на останалите $n-k$ позиции има 0 или 1. По условие, върху тези 2^{n-k} вектора въпросните функции имат фиксирана стойност 1, следователно $2^n - 2^{n-k}$ е броят на векторите, върху които тези функции могат да варират. Отговорът е $2^{(2^n - 2^{n-k})}$.

□

Зад. 9 Намерете Съвършената Дизюнктивна Нормална Форма (СъвДНФ) и полинома на Жегалкин на функцията $f(x, y, z) = (1\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,1)$ и определете дали тя е монотонна и дали е линейна.

Решение: СъвДНФ е:

$$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,y\,\overline{z} \vee x\,y\,z$$

ПЖ е:

$$\begin{aligned}
&(1+x)(1+y)(1+z) + (1+x)(1+y)z + x(1+y)(1+z) + xy(1+z) + xzy = \\
&1 + x + y + xy + z + xz + yz + xzy + z + xz + yz + xyz + x + xy + xz + xyz + xy + xyz + xzy = \\
&1 + y + xy + xz + xyz
\end{aligned}$$

Функцията не е линейна поради наличието на събираеми, съдържащи повече от една променлива. Функцията не е монотонна поради това, че има стойност 1 върху входния вектор $0\,0\,0$ и стойност 0 върху поне един вектор, когото вектора $0\,0\,0$ предшества. □

Зад. 10, БОНУС Нека

$$T_n = \begin{cases} 1, & \text{ако } n = 1 \text{ или } n = 2 \\ T_{n-1} + \frac{T_{n-1}^2}{T_{n-2}}, & \text{ако } n > 2 \end{cases}$$

Докажете по индукция, че $T_n = (n-1)!$ за всяко цяло положително n.

Решение: Поради наличието на T_{n-1} и T_{n-2} в израза отдясно, налага се да разгледаме две бази: $n = 1$ и $n = 2$. Тъй като $(1-1)! = 1$ и $(2-1)! = 1$, твърдението е вярно в базовите случаи. Да допуснем, че $T_{n-1} = (n-2)!$ и $T_{n-2} = (n-3)!$. Заместваме в израза за T_n и получаваме

$$\begin{aligned}
&T_n = (n-2)! + \frac{\left((n-2)!\right)^2}{(n-3)!} = (n-2)! + \frac{(n-2)! \times (n-2) \times (n-3)!}{(n-3)!} = \\
&(n-2)! + (n-2)! \times (n-2) = (n-2)!(1 + n - 2) = (n-2)!(n-1) = (n-1)!
\end{aligned}$$

□

Зад. 11, БОНУС Нека $S_n = \sum_{k=0}^{n} k2^k$, където n е цяло положително.

а) Изразете S_n чрез S_{n-1} за $n > 1$.

б) Намерете затворена формула за S_n, тоест не използваща рекурсия, чрез метода с характеристичното уравнение.

Решение:

а) $S_n = S_{n-1} + n2^n$.

б) Имам следното рекурентно отношение:

$$S_n = \begin{cases} 2, & \text{ако } n = 1 \\ S_{n-1} + n2^n, & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Решението е $S_n = n2^{n+1} - 2^{n+1} + 2 = (n-1)2^{n+1} + 2$.

□