Примерни решения на домашно № 3, 29 май 2021 г.

Задача 1: *Азбука* е крайно непразно множество, чиито елементи са *букви*. *Стринг над азбука* Σ е всяка крайна, може би празна, редица от букви от Σ. Примерно, ако $\Sigma = \{a, b\}$, стрингове над Σ са празният стринг, който обикновено се бележи с "ϵ" (това е единственият стринг с дължина нула; не трябва да се бърка празният стринг с празното множество!), a, b, aa, ab, aba, $baba$ и така нататък. Множеството от всички стрингове е безкрайно. Множеството от стринговете с определена дължина е крайно.

Сега разглеждаме азбуката $\Sigma' = \{x, y, z\}$. Нека n е цяло положително число.

1 т.
- Колко стринга с дължина n има над Σ'?
- Колко стринга с дължина n над Σ' не съдържат подстринга xx?

14 т.
  - Първо съставете подходящо рекурентно уравнение.

10 т.
  - Решете уравнението, което съставихте.

Решение: Стринговете без ограничения са 3^n.

Стринговете, които не съдържат xx, може да бъдат преброени чрез следното рекурентно уравнение. Нека $T(n)$ е броят на тези стрингове с дължина n. Ако $n = 1$, тези стрингове са три на брой, а именно x, y и z, така че $T(1) = 3$. Ако $n = 2$, те са осем, защото елиминираме xx и остават xy, xz, yx, yy, yz, zx, zy и zz, така че $T(2) = 8$. Ако $n > 2$, разсъждаваме така: стринг с дължина n се състои от една първа буква, следвана от стринг с дължина $n - 1$, но сега не може да комбинираме всяка начална буква с всеки стринг с дължина $n - 1$, защото може да получим "забранения" подстринг xx.

- Ако първата буква е y или z, можем спокойно да я комбинираме с всеки стринг с дължина $n-1$; ако той не съдържа xx, няма да се получи xx от това, че слагаме y или z в началото. Множеството от стринговете с дължина n, започващи с y или z и несъдържащи xx, има мощност $2T(n - 1)$.

- Ако първата буква е x, втората не може да е x, инак би се появил xx като подстринг. Втората може да е y или z. Оттам до края следва стринг с дължина $n - 2$, несъдържащ xx. Множеството от стринговете с дължина n, започващи с x, следван y или z, несъдържащи xx, има мощност $2T(n - 2)$.

Съгласно принципа на разбиването, $T(n) = 2T(n - 1) + 2T(n - 2)$. И така:

$$T(n) = \begin{cases} 3, & \text{ако } n = 1, \\ 8, & \text{ако } n = 2, \\ 2T(n-1) + 2T(n-2), & \text{ако } n > 2 \end{cases}$$

Решението е

$$T(n) = 1/6\,\left(-2\sqrt{3} + 3\right)\left(-\sqrt{3} + 1\right)^n + 1/6\,\left(1 + \sqrt{3}\right)^n\left(2\sqrt{3} + 3\right)$$

Този израз е целочислен за цели положителни n, въпреки че съдържа радикали. Бърза проверка намира, че наистина $T(1) = 3$ и $T(2) = 8$.

Задача 2: За всяко $k \geq 2$ и всяко $n \geq 2$, постройте граф G с поне n върха, такъв че $\delta(G) = k$, но G не съдържа цикъл, по-дълъг от $k + 1$.

Решение: Нека $\ell = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$. Построяваме ℓ копия на K_{k+1}, които две по две нямат общи върхове. За този граф е вярно, че има поне n върха, минималната степен на връх е k и няма цикъл с дължина, надхвърляща k.

Задача 3: За произволен граф G, *обиколката на* G е дължината на най-къс цикъл в G.

15 т. • Докажете, че всеки k-регулярен граф с обиколка 4 има поне $2k$ върха.

5 т. • Намерете 2-регулярен граф с обиколка 5.

5 т. • Намерете 3-регулярен граф с обиколка 5.

15 т. • Докажете, че всеки k-регулярен граф с обиколка 5 има поне $k^2 + 1$ върха.

Решение: Нека $G = (V, E)$ е k-рекулярен граф с обиколка 4. Нека $u, v \in V$ са произволни различни върхове, които са съседи. Те не могат да имат общ съсед w, иначе u, v, w, u би бил цикъл с дължина 3. Щом G е k-регулярен, то u има k съседа, един от които е v, и v има k съседа, един от които е u. Тогава u има $k - 1$ съседа, нито един от които не е съсед на u, и v има $k - 1$ съседа, нито един от които не е съсед на u. Общо, върховете u, v и въпросните съседи са $1+1+(k-1)+(k-1) = 2k$ върха, нито два от които не съвпадат. Тогава $|V| \geq 2k$.

2-регулярен граф с обиколка 5 е всеки 5-цикъл, ако го гледаме като граф.

3-регулярен граф с обиколка 5 е графът на Petersen.

Нека $G = (V, E)$ е k-рекулярен граф с обиколка 5. Нека u е произволен връх. Нека неговите съседи са $v_1, \ldots, v_k$. Първо забелязваме, че нито два от $v_1, \ldots, v_k$ може да са съседи; ако допуснем, че $(v_i, v_j) \in E$ за $1 \leq i < j \leq k$, веднага следва, че u, v_i, v_j, u е 3-цикъл и обиколката е 3. Второ, нито един v_i не може да има общ съсед с някой v_j, за $i \neq j$, защото иначе би имало 4-цикъл и обиколката би била 4. Но G е k-регулярен, така че всеки от v_i има $k - 1$ съседа, нито един от които не е u и които са два по по два различни. Показахме, че съществуват поне следните върхове:

- u,
- съседите на u, които са k на брой,
- върховете на разстояние 2 от u, които са $k(k-1) = k^2 - k$ на брой,

и това са два по два различни върхове. Тогава $|V| \geq 1 + k + k^2 - k = k^2 + 1$.

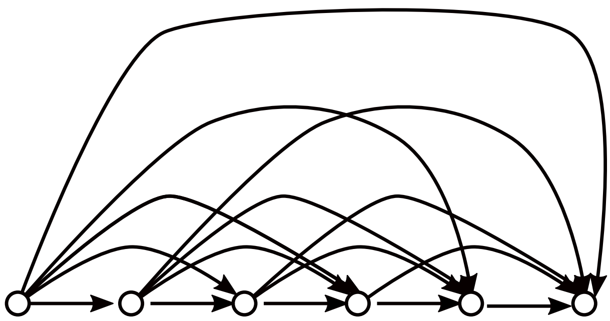
Задача 4: *Турнир* се нарича всеки ориентиран граф $G = (V, E)$, такъв че за всеки два различни върха $u, v \in V$ е вярно, че или $(u, v) \in E$, или $(v, u) \in E$. *Цикличен турнир* е турнир, в който има поне един цикъл. *Ацикличен турнир* е турнир, в който няма нито един цикъл. Тъй като турнирите са ориентирани графи, като казваме "цикъл", имаме предвид "ориентиран цикъл".

2 т. • Нарисувайте ацикличен турнир с 6 върха.

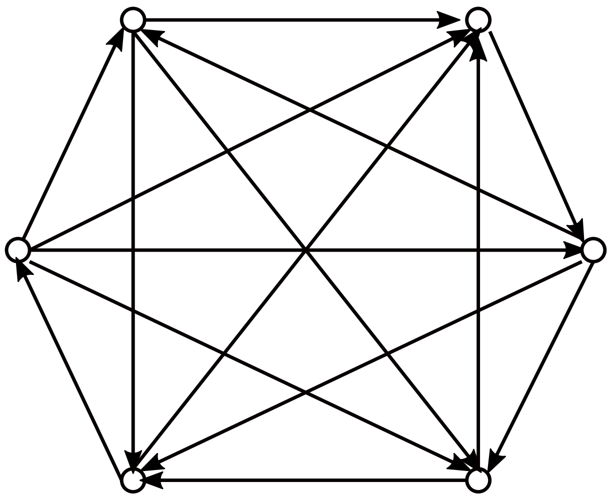
2 т. • Нарисувайте цикличен турнир с 6 върха.

21 т. • Докажете, че във всеки цикличен турнир има прост цикъл с дължина 3.

Решение: Ето ацикличен турнир с 6 върха:



Ето цикличен турнир с 6 върха:



Да разгледаме произволен цикличен турнир и произволен най-къс цикъл c в него. Нека $k = |c|$. Забелязваме, че $k \geq 3$: ако $k = 1$, то c би бил примка, а примки не са разрешени (за да има примки, трябва експлицитно да е казано това); ако $k = 2$, то би имало два различни върха с ребро от единия към другия и от другия към първия, а това не е разрешено при турнирите.

Ако $k = 3$, няма какво повече да доказваме. Нека допуснем, че $k > 3$. Припомняме си, че c по конструкция е най-къс цикъл в графа. Нека

$$c = v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k, v_1$$

Тъй като графът е турнир, точно едно от (v_1, v_3) и (v_3, v_1) е ребро в него. Ако $(v_1, v_3) \in E$, то $v_1, v_3, \ldots, v_k, v_1$ е цикъл, по-къс от c, а такъв не може да има. Ако $(v_3, v_1) \in E$, веднага виждаме цикъл с дължина 3, какъвто по допускане няма. Следователно, допускането, че $k > 3$, е грешно.