Примерни решения на задачите от изпита по Дискр. Стр-ри на Информатика, 18 юни 2021 г.

Зад. 1 Нека S е множество. Нотацията "$\bigcup\bigcup S$" означава "$\bigcup(\bigcup S)$". Нека p е съждението "$(x, y) \in S$", нека q е съждението "$x \in \bigcup\bigcup S$" и r е съждението "$y \in \bigcup\bigcup S$".

Докажете $p \to q \wedge r$.

Решение: Твърдението, което трябва да се докаже е, че ако $(x, y) \in S$, то $x \in \bigcup\bigcup S$ и $y \in \bigcup\bigcup S$. Да допуснем, че $(x, y) \in S$. По определение, (x, y) е $\{\{x\}, \{x, y\}\}$, така че допускането всъщност е

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} \in S$$

Тогава съществува елемент на S, който е множество и съдържа като елемент множеството $\{x, y\}$.

Знаем, че $\bigcup S$ е множеството, състоящо се точно от тези елементи, които се съдържат в някой елемент на S. Заключаваме, че $\{x, y\}$ е елемент на $\bigcup S$.

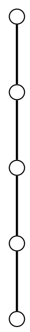
Но $\bigcup\bigcup S$ е множеството, състоящо се точно от тези елементи, които се съдържат в някой елемент на $\bigcup S$. Заключаваме, че и x, и y са елементи на $\bigcup\bigcup S$.

□

Зад. 2 Намерете броя на релациите на частична наредба над $A = \{a, b, c, d, e\}$, които имат точно един минимален и точно един максимален елемент. Обосновете отговора си.

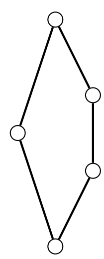
Решение: Да намерим всички диаграми на Hasse на тези релации без имена на върховете. Щом има точно един минимален и точно един максимален елемент, възможностите не са много. Останалите елементи са точно 3 и между тях съществуват $\binom{3}{2} = 3$ възможности за това, кой с кой е сравним.

- Може всеки два да са сравними, тоест, да няма двойка, които не са сравними. Това означава, че диаграмата изглежда така:

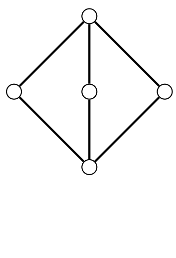


- Може измежду останалите три елемента точно една двойка да не са сравними. Тук има две възможности: този, който е сравним с всеки от другите два, да е "под тях" или "над тях". Това означава, че има точно две различни възможности за диаграмата:

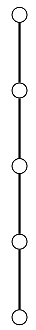
- Може измежду останалите три елемента точно две двойки да не са сравними, тоест, точно една двойка да са сравними. Това означава, че диаграмата изглежда така:



- Може измежду останалите три елемента точно три двойки да не са сравними, тоест, да няма двойка сравними елементи. Това означава, че диаграмата изглежда така:

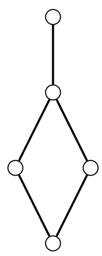


Тази диаграмата:



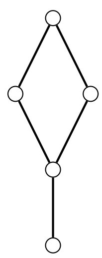
отговаря на $5! = 120$ частични наредби. Това са точно линейните наредби.

Тази диаграмата:



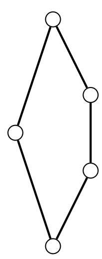
отговаря на $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ частични наредби, защото по 5 начина можем да изберем максималния елемент, след неговия избор по 4 начина можем да изберем минималния, след тези два избора по 3 начина можем да изберем елемента непосредствено под максималния, и с това определяме наредбата еднозначно.

Тази диаграмата:



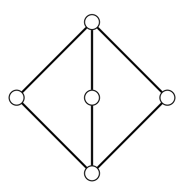
отговаря на $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ частични наредби по аналогични съображения.

Тази диаграмата:



отговаря на $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 20 = 120$ наредби, защото по 5 начина избираме максималния елемент, за всеки от тези избори по 4 начина избираме минималния елемент, за всеки от тези два избора по 3 начина избираме този от останалите, който не е сравним с никой друг от останалите, за всеки от тези избори по 2 начина определяме от останалите два кой е "отгоре", и това определя наредбата окончателно.

Тази диаграмата:



отговаря на $5 \cdot 4 = 20$ наредби, защото е достатъчно да определим максималния и минималния елемент, за да определим наредбата.

Отговорът е $120 + 60 + 60 + 120 + 20 = 380$.

$\square$

Зад. 3 Нека $G = (V, E)$ е ориентиран ацикличен граф с n върха. Нека M е неговата матрица на съседство. Нека M^n е матрицата M, повдигната на степен n. Професор Дълбоков твърди, че сумата от елементите на M^n е задължително по-малка от $\sqrt{n}$. Прав ли е професорът? Обосновете отговорите си.

Решение: Професорът е прав. От лекции знаем, че $M^k[i, j]$, за всеки i, j, съдържа броя на ориентираните пътища от връх i до бръх j с дължина точно k. Но G е даг, а в даг с n върха, всеки път е с дължина най-много $n - 1$; в противен случай би имало цикъл. Оттук веднага следва, че всички елементи на M^n са нули, така че сумата от елементите е нула, което със сигурност е по-малко от $\sqrt{n}$, тъй като $n \geq 1$. $\square$

Зад. 4 Разгледайте азбуката $\Sigma = \{a, b, c\}$. Нека S_n е множеството от стринговете над Σ с дължина n, които не съдържат ac като подстринг и не съдържат cab като подстринг.

4 т. • Намерете S_0, S_1, S_2 и S_3.

16 т. • Намерете рекурентно уравнение за $|S_n|$. Не е необходимо да го решавате.

Решение: $S_0 = \{\epsilon\}$, където ϵ означава празния стринг. $S_1 = \{a, b, c\}$. $S_2 = \{aa, ab, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$. $S_3 = \{aaa, aab, aba, abb, abc, baa, bab, bba, bbb, bbc, bca, bcb, bcc, caa, cba, cbb, cbc, cca, ccb, ccc\}$.

Една възможност да намерим $|S_n|$ е тази. Нека ac и cab се наричат *забранените подстрингове.* За $n > 0$, S_n се разбива на $S_{n,a}$, $S_{n,b}$ и $S_{n,c}$, където $S_{n,i} = \{x \in S_n \mid x \text{ завършва на } i\}$, за $i \in \{a, b, c\}$. По принципа на разбиването, $|S_n| = |S_{n,a}| + |S_{n,b}| + |S_{n,c}|$.

Да намерим $|S_{n,a}|$. Лесно се вижда, че $|S_{n,a}| = |S_{n-1}|$, защото нито един от забранените подстрингове не завършва на a, така че, конкатеринайки кой да е стринг от S_{n-1} с "a", получаваме стринг от S_n.

Да намерим $|S_{n,b}|$. Не е вярно, че $|S_{n,b}| = |S_{n-1}|$, понеже един от забранените стрингове е cab, така че, конкатенирайки стринг от S_{n-1}, който завършва на ca, с b, ще получим забранения cab накрая. Ерго, трябва да вземем само тези стрингове от S_{n-1}, които не завършват на ca. И така, за да намерим $|S_{n,b}|$, трябва да намерим броя на стринговете от S_{n-1}, завършващи на ca, за да го извадим от $|S_{n-1}|$. Всеки стринг от S_{n-1}, завършващ на ca, се състои от стринг с дължина $n-3$, незавършващ на a, конкатениран с ca. Сега въпросът е, колко са стринговете с дължина $n-3$, незавършващи на a? Множеството от стринговете с дължина $n-3$, завършващи на a, е $S_{n-3,a}$. По начин, напълно аналогичен на начина от предния параграф, извеждаме, че $|S_{n-3,a}| = |S_{n-4}|$. Тогава броят на стринговете с дължина $n-3$, незавършващи на a, е $|S_{n-3}| - |S_{n-4}|$. Следователто, $|S_{n,b}| = |S_{n-1}| - (|S_{n-3}| - |S_{n-4}|) = |S_{n-1}| - |S_{n-3}| + |S_{n-4}|$.

Да намерим $|S_{n,c}|$. Аналогично на горния параграф, не е вярно, че $|S_{n,c}| = |S_{n-1}|$ защото, конкатенирайки стринг от S_{n-1}, завършващ на a, с c, получаваме забранената конфигурация ac. Налага се да намерим броя на стринговете от S_{n-1}, незавършващи на a. С аргументация, аналогична на аргументациите в предните два параграфа, намираме, че този брой е $|S_{n-1}|-|S_{n-2}|$. Тогава $|S_{n,c}| = |S_{n-1}|-|S_{n-2}|$.

В крайна сметка,

$$|S_n| = |S_{n-1}| + |S_{n-1}| - |S_{n-3}| + |S_{n-4}| + |S_{n-1}| - |S_{n-2}| = 3|S_{n-1}| - |S_{n-2}| - |S_{n-3}| + |S_{n-4}|$$

Началните условия са $|S_0| = 1$, $|S_0| = 3$, $|S_0| = 8$ и $|S_3| = 20$. □

Зад. 5 Нека G е обикновен граф – не е ориентиран, не е мултиграф, няма примки. Нека минималната степен на връх в G е 3. Докажете, че G има цикъл с четна дължина.

Решение: Нека p е произволен най-дълъг път в G. Нека краищата на p са u и v. Очевидно $u \neq v$. Да разгледаме връх u.

Връх u има поне три съседа в графа по условие. Твърдим, че всички съседи на u се намират в p; обратното веднага води до противоречие, понеже, ако u има съсед x извън p, то x, p е път, по-дълъг от p.

И така, u има поне три съседа в p. Да ги наречем u_1, u_2 и u_3, и нека в p те се намират в този ред от u към v. Представяме си p така:

$$p = u, u_1, \ldots, u_2, \ldots, u_3, \ldots, v$$

като u_1 е следващия връх след u в p, а u_3 потенциално може да съвпада с v. Представяме си, че има ребра (u, u_1), (u, u_2) и (u, u_3).

Очевидно съществуват три пътя:

- p_1, който е подпътят на p между u и u_2,
- p_2, състоящ се от u, реброто между u и u_2, и u_2,
- p_3, състоящ се от u, реброто между u и u_3 и подпътя на p между u_3 и u_2,

всеки два от които имат общи краища u и u_2 и нямат общи вътрешни върхове. "Слепването" на всеки два от тях в общите краища е прост цикъл.

По принципа на Dirichlet, за поне два от тези три пътя е вярно, че дължините им имат една и съща четност. Тогава "слепването" им дава цикъл с четна дължина, понеже дължината на цикъла е сумата от дължините на пътищата, които участват в "слепването".

Зад. 6 За да решите тази задача, трябва да знаете условието на МПД-теоремата, изучавана на лекции.

- Какво гласи МПД-теоремата?
- Какво ще кажете за следното доказателство на МПД-теоремата?

> Нека $G = (U, V)$ е произволен свързан неориентиран граф и нека $w : E \to \mathbb{R}$ е произволна тегловна функция върху него. Нека $\{U, W\}$ е произволен срез в G. Да разгледаме произволно най-леко ребро e, прекосяващо този срез. Да допуснем, че e не се съдържа в нито едно МПД.
>
> Но G е свързан, така че поне едно ребро прекосява среза $\{U, W\}$. Нека $e' \in E$ е произволно ребро на графа, прекосяващо среза. Да добавим e към произволно МПД T. Тогава T плюс реброто e е унicикличен граф, като e е реброто от цикъла му c. Да изтрием e' от c. Това дава покриващо дърво T'. Да сравним теглата на T и T'. Очевидно $w(T') = w(T) + w(e) - w(e')$. Тъй като e е най-леко ребро, прекосяващо среза, то $w(e) - w(e') \leq 0$.
>
> Ако допуснем, че $w(e) - w(e') < 0$, излиза, че $w(T') < w(T)$, което е невъзможно, тъй като T е МПД. Ако допуснем, че $w(e) - w(e') = 0$, излиза, че $w(T') = w(T)$, тоест, T' също е МПД. Но T' съдържа e, в противоречие с допускането, че нито едно МПД не съдържа e.
>
> Показахме, че допускането е невярно. Тогава e се съдържа в поне едно МПД.

Решение: Доказателството е невалидно, тъй като e' е произволно ребро от графа и никъде не се казва, че e' е ребро от МПД-то T, което разглеждаме. Да, наистина добавянето на e към T дава унicикличен граф, но e' може да не е негово (на уницикличния) ребро, така че "Да изтрием e' от c", където c е името на цикъла, е безсмислица. Операцията "изтриване на ребро" има смисъл ако реброто, което трием, е ребро на графа, от който трием. В случая "Да изтрием e' от c" е недефинирана операция, така че "Това дава покриващо дърво T'" е невярно.

□