Примерни решения на задачите от поправителния изпита-задачи по Дискр. Стр-ри на Информатика и КН2, 20 август 2021 г., варианти 1 и 2

Задача Дадено е множество от n семейни двойки. По колко начина могат да застанат тези хора в редица по такъв начин, че хората от никоя съпружеска двойка да не са съседи в редицата?

Решение: Нека двойките са c_1, c_2, …, c_n. Нека S_i означава множеството от всички възможни сядания, в които съпрузите от c_i седят непозволено, тоест един до друг, където $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Нека U е универсумът в тази задача, а именно, множеството от всички възможни сядания на тези $2n$ души в редица. Търсеният отговор е $|\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \ldots \cap \overline{S_n}|$. По принципа на включването и изключването,

$$
\begin{aligned}
|\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \ldots \cap \overline{S_n}| = |U| &\\
&- \sum_{1 \leq i \leq n} |S_i| \\
&+ \sum_{1 \leq i < j \leq n} |S_i \cap S_j| \\
&- \ldots \\
&+ (-1)^n |S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n|
\end{aligned}
$$

Лесно се вижда, че $|U| = (2n)!$, тъй като толкова са начините, $2n$ човека да се наредят в редица.

Ще покажем, че всяка от сумите

$$
\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_t \leq n} |S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \ldots \cap S_{i_t}|
$$

където t е някое цяло число, такова че $1 \leq t \leq n$, е равна на

$$
\binom{n}{t} \times (2n-t)! \times 2^t
$$

Наистина, по $\binom{n}{t}$ начина можем да изберем t двойки от общо n двойки, след което имаме t на брой обекта-двойки и още $2n - 2t$ обекта-хора извън двойки, тоест общо $t + 2n - 2t = 2n - t$ обекта за разполагане в линейна наредба, и освен това имаме точно 2 различни начина за разполагането на двамата съпрузи от всяка от тези t двойки един до друг, което дава множител 2^t.

Отговорът е $\displaystyle\sum_{t=0}^{n} (-1)^t \binom{n}{t} (2n-t)!\, 2^t$. □

Задача Дадено е множество от n семейни двойки. Дадена е кръгла маса с $2n$ стола около себе си, като столовете са номерирани с $1, 2, \ldots, 2n$. По колко начина могат да седнат тези хора върху тези столове около масата, така че хората от никоя съпружеска двойка да не са съседи около масата?

Решение: Нека двойките са $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Нека S_i означава множеството от всички възможни сядания, в които съпрузите от c_i седят непозволено, тоест един до друг, където $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Нека U е универсумът в тази задача, а именно, множеството от всички възможни сядания на тези $2n$ души около масата (без оглед на принадлежност към съпружески двойки). Търсеният отговор е $|\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \ldots \cap \overline{S_n}|$. По принципа на включването и изключването,

$$\begin{aligned}|\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \ldots \cap \overline{S_n}| = |U| & \\ & - \sum_{1 \leq i \leq n} |S_i| \\ & + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |S_i \cap S_j| \\ & - \ldots \\ & + (-1)^n |S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n|\end{aligned}$$

Лесно се вижда, че $|U| = (2n)!$, тъй като толкова са начините, $2n$ човека да седнат на $2n$ различими (номерирани) места без никакви ограничения.

Ще покажем, че всяка от сумите

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_t \leq n} |S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \ldots \cap S_{i_t}|$$

където t е някое цяло число, такова че $1 \leq t \leq n$, е равна на

$$\binom{n}{t} \times 2n \times (2n - t - 1)! \times 2^t$$

Тази сума е равна на броя начини t двойки да са седнали непозволено, по всички възможни начини да бъдат подбрани t двойки от $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$. Имаме следните четири независими съображения.

- По $\binom{n}{t}$ начина можем да подберем t двойки от общо n.
- По $2n$ начина можем да изберем два стола за първата двойка от тези t двойки.
- За останалите $t - 1$ двойки, по $(2n - t - 1)!$ начина можем да разположим хората от тези $t - 1$ двойки, така че хората от всяка от тези двойки да са съседи, и останалите хора (тези, които не са в нито една от въпросните t двойки) по оставащите (след сядането на първата двойка) столове. Причината това да е така е, че гледаме на тези $t - 1$ двойки като на „блокове“, тоест една такава двойка е един обект, а всеки човек, който не е в някоя двойка, е самостоятелен обект. Общо обектите са на брой

$$\begin{aligned} & \underbrace{2n - 2}_{\text{толкова са хората за настаняване след сядането на първата двойка}} \\ - & \underbrace{2(t-1)}_{\text{от техния брой вадим броя на хората в } t-1 \text{ двойки}} \\ + & \underbrace{t - 1}_{\text{толкова са обектите от вид „двойка“}} = 2n - t - 1 \end{aligned}$$

  Следователно, задачата по колко начина могат да седнат тези $t - 1$ двойки непозволено на оставащите места (след сядането на първата двойка) е същата като задачата, по колко начина можем да разположим $2n - t - 1$ обекта в редица.

- За всяка от досега направените подборки на места за сядане на t двойки по всички възможни непозволени начини, за всяка двойка можем да разположим хората от нея по 2 начина на двата избрани стола. Общо това са 2^t възможни начина.

След като установихме, че

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_t \le n} |S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \ldots \cap S_{i_t}| = \binom{n}{t} 2n(2n - t - 1)!\, 2^t$$

отговорът следва да е

$$\begin{aligned}
|\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \ldots \cap \overline{S_n}| &= (2n)! + \sum_{t=1}^{n} (-1)^t \binom{n}{t} 2n(2n - t - 1)!\, 2^t \\
&= \sum_{t=0}^{n} (-1)^t \binom{n}{t} 2n(2n - t - 1)!\, 2^t \\
&= 2n \left(\sum_{t=0}^{n} (-1)^t \binom{n}{t} (2n - t - 1)!\, 2^t \right)
\end{aligned}$$

$\square$

Задача Боксьор се боксира в продължение на 75 дена. Известно е, че всеки ден той има поне един боксов мач, но общият брой на мачовете за целия 75-дневен период не надхвърля 125. Докажете, че съществува редица от последователни дни, в които боксьорът има точно 24 мача.

Решение: Нека m_i е броят на боксовите мачове от самото начало до края на i-ия ден, за $1 \leq i \leq 75$. По условие

$$1 \leq m_1 < m_2 < m_3 < \cdots < m_{75} \leq 125$$

Да добавим 24 към всяко от тези числа. Неравенствата се запазват. Имаме

$$25 \leq m_1 + 24 < m_2 + 24 < m_3 + 24 < \cdots < m_{75} + 24 \leq 149$$

Да разгледаме мултимножеството

$$\{m_1, m_2, \ldots, m_{75}, m_1 + 24, m_2 + 24, \ldots, m_{75} + 24\}_M$$

То има точно $75+75 = 150$ елемента. Но възможните стойности на тези елементи са целите числа от 1 до 149. С други думи, 150-те елемента вземат стойности измежду най-много 149 числа. Съгласно принципа на Дирихле, има поне два елемента на мултимножеството с една и съща стойност.

Ще покажем, че единият от тези елементи е измежду $m_1, \ldots, m_{75}$, а другият е измежду $m_1 + 24, \ldots, m_{75} + 24$. Допускането на обратното веднага води до противоречие, понеже по условие $m_1 < m_2 < m_3 < \cdots < m_{75}$, откъдето $m_1 + 24 < m_2 + 24 < m_3 + 24 < \cdots < m_{75} + 24$.

И така, показахме, че някое m_i има същата стойност като някое $m_j + 24$. Тогава $m_i = m_j + 24$, като $i > j$. С други думи, от ден $j + 1$ включително до ден i включително боксьорът е участвал в точно 24 мача. $\square$

Задача Нека $n \in \mathbb{N}^+$. Докежете, че както и да изберем $n+2$ числа от множеството $\{1, 2, \dots, 2n+1\}$, задължително сме избрали поне две числа, чиято сума е $2n+2$.

Решение: Ще приложим принципа на чекмеджетата. Чекмеджетата са двуелементните множества $\{1, 2n+1\}$, $\{2, 2n\}$, …, $\{n-1, n+3\}$, $\{n, n+2\}$. Те са точно n на брой и сумата на елементите на всяко от тях е $2n+2$. Те обаче не образуват покриване на $\{1, 2, \dots, 2n+1\}$, защото $n+1$ не е елемент на никое от тях.

По условие, избираме $n+2$ числа. Ябълките са тези от тях, които не са $n+1$; с други думи, ябълките са избраните числа, които са от $\{1, 2, \dots, n, n+2, \dots, 2n+1\}$. Ябълките са поне $n+1$ по очевидни причини. Съгласно принципа на чекмеджетата, поне две ябълки са в едно чекмедже. Иначе казано, поне две числа от избраните имат сума $2n+2$.

Задача Професор Дълбоков твърди, че за всяко $n \geq 11$, всеки граф, който има поне $\binom{n-1}{2} + 1$ ребра, е Хамилтонов. Прав ли е професорът? Обосновете добре отговорите си.

Решение: Професорът греши. За всяко $n \geq 11$ можем да построим следният граф с n върха:

- Първо построяваме пълен граф на $n-1$ върха. Той има $\binom{n-1}{2}$ ребра – факт, който знаем от лекции.
- После добавяме един нов връх u (той не е измежду предните $n-1$ върхове) и добавяме ребро между u и точно един от върховете на $(n-1)$-кликата.

Така полученият граф има точно n върха, точно $\binom{n-1}{2} + 1$ ребра и не е Хамилтонов, понеже u е висящ връх. Очевидно е, че ако има висящ връх, графът не е Хамилтонов.

Задача За всеки граф G, с "$\delta(G)$" означаваме минималната степен на връх в G. Професор Дълбоков твърди, че за всяко $n \geq 11$, всеки граф G, такъв че $\delta(G) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$, е Хамилтонов. Прав ли е професорът? Обосновете добре отговорите си. Пояснение: за всяко положително реално число x, нотацията "$\lceil x \rceil$" означава най-малкото цяло число, по-голямо или равно на x.

Решение: Професорът греши. За всяко $n \geq 11$ можем да построим следният граф с n върха:

- Първо построяваме пълен граф $G_1 = (V_1, E_1)$ с $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ върха.
- После построяваме пълен граф $G_2 = (V_2, E_2)$ с $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ върха, такъв че $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

  Общо G_1 и G_2 имат $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = n$ върха. За всеки връх $u \in V_1$ е вярно, че $d(u) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$, и за всеки връх $u \in V_2$ е вярно, че $d(u) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$.
- Фиксираме произволен връх $u \in V_1$ и за всеки връх $v \in V_2$, добавяме реброто (u, v). Наричаме така получения граф "G".

  След добавянето на тези ребра, степента на u се повишава с единица и става $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, степента на останалите върхове от V_1 остава $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$, и степента на всеки връх от V_2 става $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

  Тъй като за всяко цяло положително n, четно или нечетно, е вярно, че $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$, заключаваме, че $\delta(G) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$.

И така, G е граф с n върха, $\delta(G) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$ и G не е Хамилтонов. Причината G да не е Хамилтонов е, че G съдържа срязващ връх, а именно u. Това, че наличието на срязващ връх влече, че графът не е Хамилтонов, е очевидно.

Задача Нека R е релация над крайно непразно множество A. Релацията $\mathsf{R} \circ \mathsf{R}$ дефинираме така:

$$\mathsf{R} \circ \mathsf{R} = \{(a, b) \mid \exists c \in \mathsf{A}(a\mathsf{R}c \wedge c\mathsf{R}b)\}$$

Степените на релацията R дефинираме така:

$$\mathsf{R}^1 = \mathsf{R}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^+ : \ \mathsf{R}^{n+1} = \mathsf{R}^n \circ \mathsf{R}$$

Релациите R^1, R^2, R^3 и т. н. се наричат *степените на* R.

Докажете, че за всяка релация $\mathsf{R} \subseteq \mathsf{A} \times \mathsf{A}$, R е транзитивна тогава и само тогава, когато $\forall n \in \mathbb{N}^+(\mathsf{R}^n \subseteq \mathsf{R})$.

*Бонус от **10 точки**: ако заменим "$\mathsf{R}^n \subseteq \mathsf{R}$" с "$\mathsf{R}^n = \mathsf{R}$", твърдението остава ли вярно?*

Решение, част I: Нека R е транзитивна. Ще докажем по индукция, че $\forall n \in \mathbb{N}^+(\mathsf{R}^n \subseteq \mathsf{R})$. Базата е за $n = 1$: очевидно, $\mathsf{R}^1 \subseteq \mathsf{R}$. Да допуснем, че $\mathsf{R}^n \subseteq \mathsf{R}$. Ще докажем, че $\mathsf{R}^{n+1} \subseteq \mathsf{R}$. Да разгледаме произволен елемент $(a, b) \in \mathsf{R}^{n+1}$. По определение, $\exists x \in \mathsf{A}\big((a, x) \in \mathsf{R}^n \wedge (x, b) \in \mathsf{R}\big)$. От индуктивната хипотеза знаем, че $\mathsf{R}^n \subseteq \mathsf{R}$. Следователно, $(a, x) \in \mathsf{R}$. Щом $(a, x) \in \mathsf{R}$ и $(x, b) \in \mathsf{R}$, то $(a, b) \in \mathsf{R}$, тъй като R е транзитивна. Доказахме, че щом даден елемент е в R^{n+1}, то той е и в R. Тогава $\mathsf{R}^{n+1} \subseteq \mathsf{R}$.

Решение, част II: Нека $\forall n \in \mathbb{N}^+(\mathsf{R}^n \subseteq \mathsf{R})$.

Ще докажем, че R е транзитивна. Тъй като $\forall n \in \mathbb{N}^+(\mathsf{R}^n \subseteq \mathsf{R})$, в частност $\mathsf{R}^2 \subseteq \mathsf{R}$. Да разгледаме произволни елементи a, b и c от A, такива че $(a, b) \in \mathsf{R}$ и $(b, c) \in \mathsf{R}$. По определение, изпълнено е $(a, c) \in \mathsf{R}^2$. Но $\mathsf{R}^2 \subseteq \mathsf{R}$. Следователно, $(a, b) \in \mathsf{R}$. □

Колкото до допълнителният въпрос за бонус, отговорът е НЕ. Ето контрапример. Нека $\mathsf{A} = \{1, 2\}$ *и* $\mathsf{R} = \{(1, 2)\}$. *Тази релация е транзитивна, но втората ѝ степен е празното множество, така че* $\mathsf{R}^2 \subset \mathsf{R}$.

Задача Нека S е релация над крайно непразно множество A. Релацията $S \circ S$ дефинираме така:

$$S \circ S = \{(a, b) \mid \exists c \in A(aSc \wedge cSb)\}$$

Степените на релацията S дефинираме така:

$$S^1 = S$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^+ : \; S^{n+1} = S^n \circ S$$

Релациите S^1, S^2, S^3 и т. н. се наричат *степените на* R.

Докажете, че за всяка релация $S \subseteq A \times A$, ако S е рефлексивна и транзитивна, то $\forall n \in \mathbb{N}^+(S^n = S)$.

*Бонус от **10 точки**: ако отпадне изискването* S *да е рефлексивна, твърдението остава ли вярно?*

Решение: Да допуснем, че S е рефлексивна и транзитивна. Ще докажем по индукция по n, че $\forall n \in \mathbb{N}^+(S^n = S)$.

Базата е $n = 1$. Трябва да докажем, че $S^1 = S$. Но това е вярно по определение.

Да допуснем, че за някое n е вярно, че $S^n = S$. Ще докажем, че $S^{n+1} = S$. Но по определение, $S^{n+1} = S^n S$. Вече допуснахме, че $S^n = S$. Тогава $S^{n+1} = SS$ и цялото доказателство се свежда до това да докажем, че $SS = S$.

Ще покажем, че $SS \subseteq S$. Разглеждаме произволна $(a, b) \in SS$. Ще покажем, че $(a, b) \in S$. Щом $(a, b) \in SS$, по определение съществува $c \in A$, такова че $(a, c) \in S$ и $(c, b) \in S$. От транзитивността на S следва, че $(a, b) \in S$.

Ще покажем, че $S \subseteq SS$. Разглеждаме произволна $(a, b) \in S$. Ще покажем, че $(a, b) \in SS$. Припомняме си, че S е рефлексивна. Това влече, че $(a, a) \in S$. Щом $(a, a) \in S$ и $(a, b) \in S$, то от транзитивността на S следва, че $(a, b) \in S$.

Щом $SS \subseteq S$ и $S \subseteq SS$, вярно е, че $SS = S$.

Колкото до допълнителният въпрос за бонус, отговорът е НЕ. Изискването релацията да е рефлексивна е съществено. Ето контрапример. Нека $A = \{1, 2\}$ *и* $S = \{(1, 2)\}$. *Тази релация е транзитивна и не е рефлексивна. Втората ѝ степен* SS *е е празното множество, така че* $S^2 \neq S$.