ПОПРАВИТЕЛЕН ИЗПИТ ПО ИЗБИРАЕМИЯ УЧЕБЕН ПРЕДМЕТ “ИЗБРАНИ ГЛАВИ ОТ КОМБИНАТОРИКАТА И ТЕОРИЯТА НА ГРАФИТЕ” (СУ “СВЕТИ КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ”, ФМИ)

27 АВГУСТ 2021 Г.

Задача 1. По колко начина числото 2^k може да се представи във вида $2^k = a_0 + a_1 . 2^1 + a_2 . 2^2 + \ldots + a_{n-1} . 2^{n-1}$, където $a_i \in \left\{ -1 \; ; \; 0 \; ; \; +1 \right\}, \forall i$? Отговорът да се даде като явна функция на k и n, $0 \leq k < n$.

Задача 2. Ако n е цяло неотрицателно число, намерете броя на полиномите $P(x)$ с коефициенти от множеството $\left\{ 0 \; ; \; 1 \; ; \; 2 \; ; \; 3 \right\}$, за които $P(2) = n$.

Задача 3. Дядо Коледа раздава n подаръка на n деца и i-тото дете харесва x_i подаръка, $x_i > 0$ за всяко $i \in \left\{ 1 \; ; \; 2 \; ; \; 3 \; ; \; \ldots \; ; \; n \right\}$ и

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} \leq 1.$$

Докажете, че Дядо Коледа може да раздаде подаръците по един на всяко дете така, че всяко дете да получи подарък, който харесва.

Задача 4. Колко са множествата от k думи, образувани от общо n букви, ако буквите са две по две различни и всяка буква се използва точно един път? Намерете явна формула. Думите са редици от букви, k и n са цели числа и $0 \leq k \leq n$.

Време за работа: 120 минути.

СХЕМА ЗА ОЦЕНЯВАНЕ

Всяка задача носи една точка само ако е решена изцяло. Оценката = 2 + q, където q е броят на точките, събрани от всички задачи.

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Нека $2^k = a_0 + a_1 . 2^1 + a_2 . 2^2 + ... + a_{n-1} . 2^{n-1}$, $0 \leq k < n$. Следователно $a_0 + a_1 . 2^1 + a_2 . 2^2 + ... + a_{k-1} . 2^{k-1}$ се дели на 2^k, защото лявата страна и всички други събираеми в дясната страна на равенството се делят на 2^k. Тъй като $a_i \in \{-1 ; 0 ; +1\}$ за всяко i, то
$-1 - 2^1 - ... - 2^{k-1} \leq a_0 + a_1 . 2^1 + ... + a_{k-1} . 2^{k-1} \leq 1 + 2^1 + ... + 2^{k-1}$,
тоест

$$-(2^k - 1) \leq a_0 + a_1 . 2^1 + ... + a_{k-1} . 2^{k-1} \leq 2^k - 1.$$

От числата в този интервал само числото 0 се дели на 2^k. Затова

$$a_0 + a_1 . 2^1 + ... + a_{k-1} . 2^{k-1} = 0.$$

Изоставяме нулевите събираеми и прехвърляме в дясната страна на равенството отрицателните събираеми. Получаваме два равни сбора, съставени от различни степени на двойката. Тъй като всяко цяло неотрицателно число (вкл. стойността на лявата и дясната страна на равенството) се представя по единствен начин в двоичната бройна система, то няма друга възможност, освен двата сбора да са празни (тогава тяхната стойност е 0). Тоест $a_0 = a_1 = ... = a_{k-1} = 0$ и

$$2^k = a_k . 2^k + a_{k+1} . 2^{k+1} + a_{k+2} . 2^{k+2} + ... + a_{n-1} . 2^{n-1}.$$

Допускането, че $a_k = 0$, води (след прехвърляне на отрицателните събираеми от другата страна) до същото противоречие — че едно и също число притежава различни представяния в двоичната бройна система. Значи $a_k = 1$ или $a_k = -1$. Ако $a_k = 1$, то същото съображение (за единствеността на двоичния запис) показва, че $a_{k+1} = a_{k+2} = ... = a_{n-1} = 0$. Ако $a_k = -1$, то

$$2^{k+1} = a_{k+1} . 2^{k+1} + a_{k+2} . 2^{k+2} + ... + a_{n-1} . 2^{n-1}.$$

Аналогично правим извод, че $a_{k+1} = 1$ и $a_{k+2} = a_{k+3} = ... = a_{n-1} = 0$ или $a_{k+1} = -1$. Във втория случай веригата от еднотипни разсъждения продължава и в крайна сметка води до извода, че единствените равенства от желания вид са

$$2^k = -2^k - 2^{k+1} - 2^{k+2} - ... - 2^{j-1} + 2^j, \quad k \leq j \leq n-1.$$

Тези равенства са колкото допустимите стойности на j, тоест $n - k$.

Тази задача е дадена под номер 3, подусловие “а”, на състезателите от X клас на Зимните математически състезания в гр. Русе през 2008 г.

Задача 2 (Китай, 1996 г.). Търсим броя на представянията на n като сбор от степени на двойката с коефициенти 0, 1, 2 и 3. Тези коефициенти са тъкмо допустимите цифри в позиционната бройна система с основа 4. Затова сменяме степените на 2 със степени на 4. За степените с четен показател е ясно как се прави това: $2^{2k} = 4^k$. При нечетен показател изнасяме една двойка пред скоби: $2^{2k+1} = 2 . 4^k$. Така получаваме равенството $a + 2b = n$.

В това равенство множителят 2 е двойката, изнесена пред скоби, а пък a и $2b$ са стойностите на сборовете от степените на 2 с четни и нечетни показатели съответно.

Получената биекция ни дава право да търсим броя на представянията на n във вида $a + 2b = n$, където a и b са цели неотрицателни числа. Ясно е, че числото $a = n - 2b$ е цяло за всяко цяло b и е неотрицателно, ако и само ако $b \leq n / 2$. С други думи, числото b може да приема само следните стойности: $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ ,\ \lfloor n / 2 \rfloor$. Броят им е $1 + \lfloor n / 2 \rfloor$, колкото е също броят на представянията на числото n във вида $a + 2b = n$. Така отговорът на задачата е $1 + \lfloor n / 2 \rfloor$.

Задача 3. Разглеждаме двуделен граф: върховете от единия дял са децата, върховете от другия дял са подаръците, ребрата показват кое дете кой подарък харесва. По условие всеки дял на графа има n върха.

Избираме произволни k деца. Да допуснем, че всяко от тях харесва по-малко от k подаръка. Тогава техните хиксове (k на брой) са по-малки от k, затова реципрочните им стойности са по-големи от $1 / k$ и сборът им е по-голям от 1. Понеже всички хиксове са положителни, то сборът им също е по-голям от 1, което противоречи на неравенството от условието.

Следователно направеното допускане не е вярно. Вярно е противното: които и k деца да изберем, поне едно от тях ще харесва поне k подаръка. Толкова повече всичките k избрани деца харесват общо поне k подаръка. От теоремата на Хол за сватбите следва, че графът има съвършено съчетание, т.е. множество от n ребра без общи краища. Това съчетание представлява начин да се разпределят подаръците по един на дете така, че всяко дете да получи подарък, който харесва.

Задача 4. Съществуват $n!$ пермутации без повторение на дадените n букви. Във всяка от тях има $n - 1$ места между буквите. Можем да изберем $k - 1$ места по $\binom{n-1}{k-1}$ начина. На всяко от избраните $k - 1$ места слагаме един разделител. Така получаваме k думи. Според правилото за умножение дотук разполагаме с $n!\binom{n-1}{k-1}$ възможности да образуваме k думи. Но самите думи нямат наредба: по условие имаме множество, а не редица от думи. Тъй като всяко множество поражда $k!$ редици от думи, то всяко множество е броено $k!$ пъти, следователно трябва да разделим получения резултат на $k!$ и така намираме верния резултат: $\frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}$.

Тези числа са известни като числа на Лах без знак.