Решение на контролното по ДАА, специалност Инф., група 2

Зад. 1 Нека $n = 2k$ за някое $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Даден е алгоритъм Alg-1, чийто вход е масив $A[1, 2, \ldots, n]$ от цели числа. Докажете, че алгоритъмът връща сумата от числата на масива.

```
Alg-1(A[1,2,...,n] : integers)
1  i ← 1, j ← n, s ← 0
2  while i < j do
3       s ← s + A[i] + A[j]
4       i ← i + 1
5       j ← j − 1
6  return s
```

Решение: Следното твърдение е инварианта за цикъла.

При всяко достигане на ред 2 е изпълнено $s = \sum_{p=1}^{i-1} A[p] + \sum_{q=j+1}^{n} A[q]$.

База При първото достигане на ред 2 е изпълнено $i = 1$ и $j = n$ заради присвояванията на ред 1, така че дясната страна на инвариантата е $s = \sum_{p=1}^{1-1} A[p] + \sum_{q=n+1}^{n} A[q] = \sum_{p=1}^{0} A[p] + \sum_{q=n+1}^{n} A[q] = 0$. От друга страна, $s = 0$ заради присвояването на ред 1.✓
Поддръжка Да допуснем, че инвариантата е изпълнена при някое достигане на ред 2, което не е последното. Съгласно това допускане, $s = \sum_{p=1}^{i-1} A[p] + \sum_{q=j+1}^{n} A[q]$. След присвояването на ред 3 е изпълнено $s = \sum_{p=1}^{i-1} A[p] + \sum_{q=j+1}^{n} A[q] + A[i] + A[j] = \sum_{p=1}^{i} A[p] + \sum_{q=j}^{n} A[q]$. След присвояванията на редове 4 и 5, спрямо новите стойности на i и j, отново е изпълнено $s = \sum_{p=1}^{i-1} A[p] + \sum_{q=j+1}^{n} A[q]$.✓
Терминация При последното достигане на ред 2 очевидно $i = k + 1$ и $j = k$. Заествайки тези стойности в инвариантата, получаваме $s = \sum_{p=1}^{k+1-1} A[p] + \sum_{q=k+1}^{n} A[q] = \sum_{p=1}^{k} A[p] + \sum_{q=k+1}^{n} A[q] = \sum_{p=1}^{n} A[p]$.

Зад. 2 Подредете по асимптотично нарастване следните шест функции на n:

$$n^2 + 200n, \quad \sum_{i=1}^{n} i, \quad \binom{2n}{n}, \quad 2^n, \quad (2n)^2, \quad \sqrt{2^n}$$

Решение: Да наречем шестте функции $f_1(n), \ldots, f_6(n)$ в реда на изписването им в условието. Първо забелязваме, че $f_2(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \Theta(n^2)$ и освен това $f_5(n) = 4n^2 = \Theta(n^2)$. Очевидно $f_1(n) = \Theta(n^2)$. Следователно, $f_1(n) \asymp f_2(n) \asymp f_5(n)$.

Да разгледаме $f_3(n)$. Използвайки дефиницията на биномен коефициент и апроксимацията на Стирлинг, получаваме

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \approx \frac{\sqrt{2\pi 2n}\frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}}{\left(\sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}\right)^2} \asymp \frac{1}{\sqrt{n}} 2^{2n}$$

Тъй като

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} 2^{2n}}{2^n} = \infty$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{\sqrt{2^n}} = \infty,$$

е изпълнено $f_3(n) \succ f_4(n) \succ f_6(n)$.

За да получим крайната наредба, забелязваме, че $f_6(n) = \left(\sqrt{2}\right)^n$. Известно е, $\left(\sqrt{2}\right)^n \succ n^a$ за всяко положително a, следователно $f_6(n) \succ f_i(n)$ за $i \in \{1, 2, 5\}$.

Отговорът е $f_3(n) \succ f_4(n) \succ f_6(n) \succ f_1(n) \asymp f_2(n) \asymp f_5(n)$.

Зад. 3 Даден е алгоритъм Alg-2, чийто вход е цяло число $n > 3$. Намерете стойността, която връща алгоритъмът, като функция на n. Нека отговорът бъде затворена формула. Обосновете отговора си.

```
Alg-2(n)
s ← 0
for i ← 1 to n
    for j ← 1 to min{i, 3}
        s ← s + 1
return s
```

Решение:

$$s = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\min\{i,3\}} 1 = \sum_{j=1}^{\min\{1,3\}} 1 + \sum_{j=1}^{\min\{2,3\}} 1 + \sum_{i=3}^{n} \sum_{j=1}^{\min\{i,3\}} 1 =$$

$$\sum_{j=1}^{1} 1 + \sum_{j=1}^{2} 1 + \sum_{i=3}^{n} \sum_{j=1}^{3} 1 = 1 + 2 + \sum_{i=3}^{n} 3 = 3 + (n - 3 + 1) \times 3 = 3 + 3(n-2) = 3n - 3$$