Решение на контролното по ДАА, специалност КН, група 4

Зад. 1 Нека $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$. Даден е алгоритъм Alg-1, чийто вход е масив $A[1, 2, \ldots, n]$ от цели числа, две по две различни. Докажете, че алгоритъмът връща второто най-голямо число от масива.

```
Alg-1(A[1,2,...,n] : integers)
 1  m ← max{A[1], A[2]}
 2  s ← min{A[1], A[2]}
 3  for i ← 3 to n
 4      if A[i] > m
 5          s ← m
 6          m ← A[i]
 7      else
 8          if A[i] > s
 9              s ← A[i]
10  return s
```

Решение: Следното твърдение е инварианта за цикъла.

> При всяко достигане на ред 3 променливата m съдържа стойността на максималния елемент от подмасива $A[1 \ldots i-1]$, а променливата s съдържа стойността на втория по големина елемент от подмасива $A[1 \ldots i-1]$.

База При първото достигане на ред 3 променливата i е 3. Имайки предвид, че по условие в масива няма еднакви числа, за $i = 3$ твърдението е "$m = \max\{A[1], A[2]\}$ и $s = \min\{A[1], A[2]\}$". Това е вярно заради присвояванията на ред 1 и 2.✓

Поддръжка Да допуснем, че инвариантата е изпълнена при някое достигане на ред 3, което не е последното. От допускането и това, че в масива няма еднакви числа следва, че $s < m$. Следните три възможности са изчерпателни:

1. $A[i] < s < m$. В такъв случай е вярно, че m съдържа стойността на максималния елемент от $A[1 \ldots i]$, а s, на втория по големина елемент от $A[1 \ldots i]$, **преди** да започне изпълнението на тялото на цикъла. От друга страна, нито едно от условията на редове 4 и 8 не е изпълнено, следователно нито едно от присвояванията в цикъла не се извършва. Следователно, спрямо новата стойност на i при следващото достигане на ред 3, инвариантата остава в сила.

2. $s < A[i] < m$. В такъв случай е вярно, че m съдържа стойността на максималния елемент от $A[1 \ldots i]$, а $A[i]$ е вторият по големина елемент от $A[1 \ldots i]$, **преди** да започне изпълнението на тялото на цикъла. В този случай условието на ред 4 не е изпълнено, но условието на ред 8 е изпълнено, така че присвояването на ред 9 се извършва. Спрямо новата стойност на i при следващото достигане на ред 3, инвариантата остава в сила.

3. $s < m < A[i]$. В такъв случай е вярно, че $A[i]$ съдържа стойността на максималния елемент от $A[1 \ldots i]$, а m, на втория по големина елемент от $A[1 \ldots i]$, **преди** да започне изпълнението на тялото на цикъла. В този случай условието на ред 4 е изпълнено, така че присвояванията на редове 5 и 6 се извършват. Спрямо новата стойност на i при следващото достигане на ред 3, инвариантата остава в сила.✓

Терминация При последното достигане на ред 3 очевидно $i = n + 1$. Замествайки тази стойност в инвариантата, получаваме твърдението "m съдържа стойността на максималния елемент от подмасива $A[1 \ldots n]$, а променливата s съдържа стойността на втория по големина елемент от подмасива $A[1 \ldots n]$".

Зад. 2 Подредете по асимптотично нарастване следните шест функции на n:

$$\ln n, \quad \lg n, \quad \sum_{i=1}^{\lfloor \lg n \rfloor} i, \quad \sqrt[3]{n} - (\ln n)^2, \quad \sqrt[4]{n}, \quad n^{\lg n}$$

Решение: Да наречем шестте функции $f_1(n), \ldots, f_6(n)$ в реда на изписването им в условието. Първо забелязваме, че $\ln n = \log_e n = \frac{\log_2 n}{\log_2 e} = \frac{1}{\log_2 e} \lg n = \Theta(\lg n)$, следователно $f_1(n) \asymp f_2(n)$.

Да разгледаме $f_3(n)$. Известно е, че $\sum_{k=1}^{\lg n} \frac{1}{k} \asymp \lg^2 n$. В сила е $f_3(n) \succ f_1(n) \asymp f_2(n)$.

Да разгледаме $f_5(n) = \sqrt[4]{n} = n^{\frac{1}{4}}$. Това е функция с полиномиално нарастване и, както сме показали, тя расте асимптотично по-бързо от всяка полилогаритмична функция, в частност $\lg^2 n$. Следователно $f_5(n) \succ f_3(n) \succ f_1(n) \asymp f_2(n)$.

Да разгледаме $f_4(n) = \sqrt[3]{n} - (\ln n)^2$. Тъй като

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[3]{n} - (\ln n)^2}{\sqrt[4]{n}} = \infty,$$

в сила е $f_4(n) \succ f_5(n) \succ f_3(n) \succ f_1(n) \asymp f_2(n)$.

Накрая да разгледаме $f_6(n) = n^{\lg n}$. Тъй като

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^{\lg n}}{\sqrt[3]{n} - (\ln n)^2} = \infty,$$

в сила е $f_6(n) \succ f_4(n) \succ f_5(n) \succ f_3(n) \succ f_1(n) \asymp f_2(n)$.

Зад. 3 Даден е алгоритъм Alg-2, чийто вход е цяло число $n > 3$. Намерете стойността, която връща алгоритъмът, като функция на n. Нека отговорът бъде затворена формула. Обосновете отговора си.

```
Alg-2(n)
1  s ← 0
2  for i ← 0 to n
3      if i mod n = 0
4          for j ← 0 to n
5              s ← s + 1
6  return s
```

Решение: Условието на ред 3 е истина за точно две стойности на i, а именно 0 и n. За всяка от тях, вътрешният цикъл се изпълнява точно $n + 1$ пъти. Следователно, общият брой изпълнения на ред 5 е $2n + 2$.