Решение на контролното по ДАА, специалност КН, група 5.

Зад. 1 Нека $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Даден е алгоритъм Alg-1, чийто вход е масив $A[1, 2, \ldots, n]$ от цели числа. Докажете, че алгоритъмът връща $A[1] + A[n]$.

```
Alg-1(A[1, 2, ..., n] : integers)
1  s ← A[1] + A[2]
2  for i ← 3 to n
3      s ← s + A[i] − A[i − 1]
4  return s
```

Решение: Следното твърдение е инварианта за цикъла.

При всяко достигане на ред 2 е изпълнено $s = A[1] + A[i-1]$.

База При първото достигане на ред 2 променливата i е 3. Заествайки i с 3 в инвариантата получаваме $s = A[1] + A[2]$. От друга страна, s е именно $A[1] + A[2]$ заради присвояването на ред 1.✓
Поддръжка Да допуснем, че инвариантата е изпълнена при някое достигане на ред 2, което не е последното. Съгласно това допускане, $s = A[1] + A[i-1]$ спрямо текущото i. След присвояването на ред 3 е в сила $s = A[1] + A[i-1] + A[i] - A[i-1] = A[1] + A[i]$. Спрямо новата стойност на i, отново е в сила $s = A[1] + A[i-1]$.
Терминация При последното достигане на ред 2 очевидно $i = n + 1$. Замествайки тази стойност в инвариантата, получаваме $s = A[1] + A[n]$

Зад. 2 Подредете по асимптотично нарастване следните шест функции на n:

$$n^n, \quad \sqrt{n}^{\sqrt{n}^{\sqrt{n}}}, \quad (n!)^{\lg n}, \quad n!, \quad 2^{2n}, \quad n^{n+1}$$

Решение: Да сравним $\sqrt{n}^{\sqrt{n}^{\sqrt{n}}}$ с $(n!)^{\lg n}$ чрез логаритмуване.

$$\lg\left(\sqrt{n}^{\sqrt{n}^{\sqrt{n}}}\right) = (\lg n)\sqrt{n}^{\sqrt{n}}$$
$$\lg\left((n!)^{\lg n}\right) = \lg n \times \lg(n!) = \lg n \times \Theta(n \lg n) = \Theta(n \lg^2 n)$$

Първата от тези функции расте асимптотично по-бързо от всяка полиномиална функция заради множителя $\sqrt{n}^{\sqrt{n}}$, докато втората расте асимптотично по-бавно от n^2. Следователно, $\sqrt{n}^{\sqrt{n}^{\sqrt{n}}} \succ (n!)^{\lg n}$.

Да сравним $(n!)^{\lg n}$ с n^{n+1}, пак чрез логаритмуване. Както видяхме, логаритъмът на $(n!)^{\lg n}$ има асимптотика $\Theta(n \lg^2 n)$, докато логаритъмът на n^{n+1} очевидно има асимптотика $\Theta(n \lg n)$. Следователно, $(n!)^{\lg n} \succ n^{n+1}$.

Фактът, че $n^{n+1} \succ n^n$, е очевиден.

Фактът, че $n^n \succ n!$, се доказва тривиално, примерно така

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{n-1}}{n.(n-1)\ldots 2} \times \frac{n}{1} = \infty$$

Да сравним $n!$ с 2^{2n} чрез логаритмуване. Логаритъмът на $n!$ има асимптотика $\Theta(n \lg n)$, докато логаритъмът на 2^{2n} има асимптотика $\Theta(n)$. Следователно, $n! \succ 2^{2n}$.

Крайната наредба е $\sqrt{n}^{\sqrt{n}^{\sqrt{n}}} \succ (n!)^{\lg n} \succ n^{n+1} \succ n^n \succ n! \succ 2^{2n}$.

Зад. 3 Даден е алгоритъм Alg-2, чийто вход е цяло число $n > 3$. Намерете стойността, която връща алгоритъмът, като функция на n. Нека отговорът бъде затворена формула. Обосновете отговора си.

```
Alg-2(n)
  s ← 0
  for i ← 1 to 2n
      for j ← 1 to i
          s ← s + 1
  return s
```

Решение:

$$s = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{i} 1 = \sum_{i=1}^{2n} i = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1)$$