Контролна работа (упражнения, вариант 1) по ДАА, 2.04.2013г.

Име: ________________________________, ФН:_____, Спец./курс:_______

Задача	1	2	3	4	Общо
получени точки					
максимум точки	14	12	10	14	50

Задача 1 Подредете по асимптотично нарастване функциите по-долу. Обосновете отговора си и напишете в явен вид подредбата.

$$\lg((n!)^n), \qquad \sum_{i=0}^{n} 2^i, \qquad n^2 \lg n, \qquad (\sqrt{5})^n, \qquad n^2 + \lg(n!), \qquad \binom{n}{3}$$

Задача 2 Решете следните рекурентни отношения:

а) $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n$ б) $T(n) = 2T(n-1) + 1$

в) $T(n) = 2T(\frac{n}{\sqrt{2}}) + n^2$ г) $T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} T(i) + n$

Задача 3 След първото изпълнение на функцията *Partition* от алгоритъма *QuickSort* масивът, подаден за сортиране изглежда така:

$3, 2, 4, 6, 5, 7, 11, 8, 13$

Кой от елементите на масива е бил избран за разделител (*splitter*)? Ако са възможни няколко различни отговора, кои са те?

Известно е, че ако елемент $A[s]$ е избран за *splitter*, след изпълнението на *Partition* наляво от него ще се разположат числа, по-малки от $A[s]$, а всички надясно от позиция s ще са по-големи или равни на $A[s]$.

Задача 4 Намерете сложността на следния алгоритъм:

```
EASY1(n: integer)
  s ← 0; i ← 1
  while s ≤ n do
      s ← s + i
      i ← i + 1
  return i
```

Решения:

Задача 1 Означаваме с $f_1, f_2 \ldots f_6$ дадените функции. Първо ги опростяваме, като ползваме основните свойства на асимптотичните нотации:

$$f_1 = \lg((n!)^n) = n\lg(n!) = n\Theta(n\lg n) = \Theta(n^2\lg n)$$

$$f_2 = \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1 = \Theta(2^n)$$

$$f_5 = n^2 + \lg(n!) = n^2 + \Theta(n\lg n) = \Theta(n^2)$$

$$f_6 = \binom{n}{3} = \Theta(n^3)$$

Очевидно f_2 и f_4 имат експоненциален растеж, останалите – полиномиален. За f_2 и f_4 сравняваме основите ($2 < \sqrt{5}$), за f_1, f_3, f_5 и f_6 сравняваме степента на полинома, при равенство множителя $\lg n$.

Така получаваме наредбата:

$$f_5 = \Theta(n^2) \prec f_1 = \Theta(n^2\lg n) \asymp f_3 = n^2\lg n \prec f_6 = \Theta(n^3) \prec f_2 = \Theta(2^n) \prec f_4 = (\sqrt{5})^n$$

Задача 2 Случаи а) и в) са подходящи за решаване с Мастър теорема.

За а) пресмятаме $k = \log_b a = \lg 3$ и сравняваме $n^k = n^{\lg 3}$ с $f(n) = n$. От $\lg 3 > 1$ следва, че съществува $\varepsilon > 0$, такова, че $n^{\lg 3 - \varepsilon} \succ n$. Попадаме в първи случай на Мастър теоремата, следователно $T(n) = \Theta(n^{\lg 3})$.

За в) пресмятаме $k = \log_{\sqrt{2}} 2 = 2$ и сравняваме $n^k = n^2$ с $f(n) = n^2$. Очевидно $n^k \asymp f(n)$. Попадаме във втори случай на Мастър теоремата, следователно $T(n) = \Theta(n^2\lg n)$.

Рекурентното отношение б) можем да решим със заместване – след $k-1$ замествания получаваме $T(n) = 2^kT(n-k) + 1 + 2 + \ldots + 2^{k-1} = 2^kT(n-k) + 2^k - 1$. При $k = n$ достигаме до решението $T(n) = 2^nT(0) + 2^n - 1 = \Theta(2^n)$.

Опростяваме г) като извадим равенствата, дефиниращи $T(n)$ и $T(n-1)$:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} T(i) + n$$

$$T(n-1) = \sum_{i=0}^{n-2} T(i) + n - 1$$

Получаваме $T(n) - T(n-1) = T(n-1) + 1$ или $T(n) = 2T(n-1) + 1$, което е точно подзадача б).

Задача 3 С директна проверка установяваме, че елементите на масива $A[3] = 4, A[6] = 7$ и $A[9] = 13$ удовлетворяват изискванията за разделител, описани в задачата.

Задача 4 Забелязваме, че в променливата s се натрупва сумата от нарастващите стойности на i. Можем да формулираме инварианта на цикъла *while* така:

Когато се изпълнява ред 2, е вярна зависимостта $i = k \rightarrow s = \sum_{i=1}^{k-1} i$.

Доказваме индуктивно верността на инвариантата, а зависимостта опростяваме първо до $i = k \rightarrow s = k(k-1)/2$, а след това до $s = i(i-1)/2$.

Цикълът ще приключи когато $s > n$, тоест за най-малкото i, за което $i(i-1)/2 > n$. Лесно се вижда, че това се случва когато i надвиши $\sqrt{2n} + 1$.

Тъй като цикълът се изпълнява толкова пъти, колкото е нарастването на i, сложността на програмата ще бъде $\Theta(\sqrt{n})$.