Решения на задачите от контролно по ДАА, специалност КН, група 6

Зад. 1 Подредете по асимтотично нарастване следните функции на n:

$$n^{2\ln(3n)} \qquad (lgn)^{n!} \qquad n^{n^{\sqrt{2}}} \qquad (lgn)^{3,4n} \qquad \sqrt{2}^{n^n} \qquad n^{\sqrt{2}^n}$$

Решение:

Нека сравним $n^{2\,ln\,3n}$ и $(lgn)^{3,4n}$ чрез логаритмуване.

$$lg\left(n^{2\,ln(3n)}\right) = 2\,ln(3n)\,lgn = \Theta(lg^2 n)$$

$$lg((lgn)^{3,4n}) = 3{,}4nlglgn = \Theta(nlglgn)$$

Очевидно $\lg^2 n \prec nlglgn$, от където следва и

$$n^{2\ln(3n)} \prec (lgn)^{3,4n}.$$

Отделно, $\lg\left(n^{n^{\sqrt{2}}}\right) = n^{\sqrt{2}}lgn \succ nlglgn$, което води до

$$n^{n^{\sqrt{2}}} \succ (lgn)^{3,4n}.$$

Сега нека разгледаме $n^{\sqrt{2}^n}$ и отново вземем логаритъм от функцията.

$lg\left(n^{\sqrt{2}^n}\right) = \sqrt{2}^n lgn$, която очевидно е асимтотично по-бързо разстяща $n^{\sqrt{2}}lgn$, от където следва и

$$n^{\sqrt{2}^n} \succ n^{n^{\sqrt{2}}}$$

За следващото сравнение вземаме функцията $(lgn)^{n!}$. Логаритмувайки я получаваме

$lg(lgn)^{n!} = n!\,lglgn$. Сега нека разгледаме функциите $\sqrt{2}^n lgn$ и $n!\,lglgn$. Отново логаритмувайки получаваме:

$lg\left(\sqrt{2}^n lgn\right) = nlg\sqrt{2} + lglgn = \Theta(n)$

$lg(n!\,lglgn) = lg(n!) + lglglgn = nlgn + lglglgn = \Theta(nlgn)$

И тъй като $n \prec nlgn$, то $\sqrt{2}^n lgn \prec n!\,lglgn$ и, следователно

$$n^{\sqrt{2}^n} \prec (lgn)^{n!}$$

За последното сравнение можем отново да използваме метода на логаритмуването. Именно,

$lg\left(\sqrt{2}^{n^n}\right) = n^n lg\sqrt{2} \succ n!\,lglgn$, т.е

$$(lgn)^{n!} \prec \sqrt{2}^{n^n}$$

Окончателно, наредбата на функциите е следната:

$$n^{2\ln(3n)} \prec (lgn)^{3,4n} \prec n^{n^{\sqrt{2}}} \prec n^{\sqrt{2}^n} \prec (lgn)^{n!} \prec \sqrt{2}^{n^n}$$

Зад. 2 Решете чрез *развиване* или чрез *дърво на рекурсията*. Докажете чрез *индукция* коректността на получения отговор.

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1$$
$$T(1) = \Theta(1)$$

Решение:

Чрез развиване:

$$\begin{aligned} T(n) &= 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1 \\ &= 3\left(3T\left(\frac{n}{9}\right) + 1\right) + 1 \\ &= 3^2T\left(\frac{n}{3^2}\right) + 3 + 1 \\ &= \cdots \\ &= 3^kT\left(\frac{n}{3^k}\right) + 3^{k-1} + 3^{k-2} + \cdots + 3^1 + 3^0, \text{ където } 0 \le k \le \lg_3 n \\ &= \sum_{i=0}^{lg_3 n} 3^i = \Theta\left(3^{\lg_3 n}\right) = \Theta(n) \end{aligned}$$

Сега нека докажем формално твърдението провеждайки индукция. Ще докажем $T(n) = O(n)$ и $T(n) = \Omega(n)$ поотделно:

Първо,

$$T(n) = O(n) \Leftrightarrow \exists c > 0, \exists n_0 : \forall n > n_0 : T(n) \le cn$$

Ще докажем по-силното твърдение, че $T(n) \le cn - b$ за някоя положителна константа b.

От рекурсивното отношение имаме:

$$\begin{aligned} T(n) &= 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1 \\ &\le 3\left(c\frac{n}{3} - b\right) + 1 \text{ (от индукционното допускане)} \\ &= cn - (3b - 1) \\ &\le cn - b, \text{ за } b > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

От тук и от дефиницията на O следва, че $T(n) = O(n)$

Доказване на $T(n) = \Omega(n)$ е аналогично.

$$T(n) = \Omega(n) \Leftrightarrow \exists c > 0, \exists n_0 : \forall n > n_0 : T(n) \ge cn$$

От рекурсивното отношение имаме:

$$\begin{aligned} T(n) &= 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1 \\ &\ge 3\left(c\frac{n}{3}\right) + 1 \text{ (от индукционното допускане)} \\ &= cn + 1 \\ &\ge cn \end{aligned}$$

Аналогично, от тук следва, че $T(n) = \Omega(n)$. □

Зад. 3 Даден е алгоритъм `ALG-1`, чийто вход е числото $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Докажете, че алгоритъмът отговаря на въпроса „четно ли е n?”.

```
Alg-1(n)
1    i ← 2
2    while i < n do
3         i ← i + 2
4    end
5    if i == n
6         return true
7    else
8         return false
```

Решение:

Следното твърдения формират инварианта за цикъла:

На всяка итерация i е от вида $2k$ и, освен това, n не се променя.

Тук с k сме означичили номера на текущата итерация. Ясно е, че $k = 1, 2, \ldots, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$-1
Втората част на инвариантата е очевидно, вземайки в предвид факта, че няма оператор в алгоритъма, който да променя стойността на n.
Освен това, си струва да се отбележи, че алгоритъмът *винаги* завършва, тъй като n е крайно, а i расте неограничено.
Първата част от инвариантата ще докажем както следва:
База (инициализация):
При първо достигане до ред 2, стойността на i е 2 = 2*1 - четно.
Поддръжка:
Нека $i = 2k$ на някоя итерация, която не е последна. Тогава, след изпълнение на ред 3, стойността на i ще бъде $2k + 2 = 2(k + 1)$.
Теминация:
След края на цикъла стойността на i ще е 2 $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$**.**

1 слувай: n е четно. Тогава $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \frac{n}{2}$ и $i = n$. В този случай (от ред 5) алгоритъмът връща *истина.*

2 случай: n е нечетно. Тогава $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \frac{n+1}{2}$ и $i = n + 1$. В този случай (от ред 7) алгоритъмът връща *лъжа.*□