Зад. 1 Докажете по индукция, че

$$T(n) = 2T(n-1) + n$$
$$T(1) = \Theta(1)$$

има решение $T(n) = \Theta(2^n)$.

Решение:

Част I: Доказателство, че $T(n) = O(2^n)$. Да допуснем, че съществуват положителни константи b и c, такива че за всички достатъчно големи n,

$$T(n) \leq c2^n - bn$$

От индукционното предположение

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2(c2^{n-1} - b(n-1)) + n \\ &= c2^n - 2bn + 2b + n \\ &= c2^n - bn + (1-b)n + 2b \\ &\leq c2^n - bn \text{ за всеки избор на } c > 0 \text{ и } b > 1 \end{aligned}$$

Part II: Доказателство, че $T(n) = \Omega(n)$. Да допуснем, че съществуват положителна константа d, такава че за всяко достатъчно голямо n,

$$T(n) \geq d2^n$$

От индукционното предположение

$$\begin{aligned} T(n) &\geq 2(d2^{n-1}) + n \\ &= d2^n + n \\ &\geq d2^n \end{aligned}$$

□

Зад. 2 Даден е масив от цели числа $A[1, \ldots, n]$. Предложете колкото е възможно по-бърз алгоритъм, който строи нов масив $B[1, \ldots, n]$, такъв че

$$\forall i, 1 \leq i \leq n : B[i] = \prod_{j \in \{X_n \setminus \{i\}\}} A[j]$$

където $X_n = \mathbb{N} \setminus (\{0\} \cup \{i \in \mathbb{N} \mid i > n\})$. Не може да се използва операцията деление.

Решение:

В линейно време се строят два масива $Pref[1, \ldots, n]$ и $Suff[1, \ldots, n]$, където $\forall i, 1 \leq j \leq n : Pref[i] = \prod_{j=1}^{i-1} A[j]$ и $\forall i, 1 \leq j \leq n : Suff[i] = \prod_{j=i+1}^{n} A[j]$. След това $\forall i, 1 \leq j \leq n : B[i] = Pref[i] * Suff[i]$.

Обща сложност: $\Theta(n)$.