Контролна работа (упражнения, вариант 2) по ДАА, 4.06.2013г.

Име: ________________________________, ФН:______, Спец./курс:________

Задача	1	2	3	4	Общо
получени точки					
максимум точки	16	14	20	0	50

Задача 1 Решете следните рекурентни отношения:

а) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^2$ б) $T(n) = 2T(n-1) + 2^n + 1$

в) $T(n) = 2T(\frac{n}{\sqrt{2}}) + n \lg n$ г) $T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} T(i) + n^2$

Задача 2 Ориентиран граф $G(V, E)$ има поне 2 силно свързани компоненти. Докажете, че в графа няма хамилтонов цикъл.

Задача 3 Кубичният граф има има 8 върха и 12 ребра (съоветно върховете и ръбовете на обикновен куб).

(a) Нарисувайте този граф така, че ребрата му да не се пресичат.

(b) Намерете хамилтонов цикъл в него.

(c) Намерете минимално върхово покритие в графа.

(d) Намерете максимално съчетание в графа.

Решения:

Задача 1 (а) Прилагаме Мастър теорема. $k = \log_2 4, k = 2$, следователно $n^k = \Theta(n^2)$, намираме се във втори случай, решението на рекурентното отношение е $T(n) = \Theta(n^2 \lg n)$.

(б) Решаваме чрез характеристично уравнение. Хомогенната част поражда уравнението $x = 2$, с множество от корени $\{2\}$. Нехомогенната част поражда множеството корени $\{1, 2\}$. Като слеем двете мултимножества, получаваме пълния списък от корени $\{1, 2, 2\}$. Базисните решения са $1^n, 2^n, n2^n$. Последното расте най-бързо, следователно $T(n) = \Theta(n2^n)$.

(в) Прилагаме Мастър теорема. $k = \log_{\sqrt{2}} 2, k = 2$, следователно $\exists \varepsilon > 0, n^{k-\varepsilon} = \Omega(n \lg n)$, намираме се в първи случай, решението на рекурентното отношение е $T(n) = \Theta(n^2)$.

(г) За да унищожим сумиращите се членове, изписваме рекурентното отношение за $n - 1$ и го изваждаме от рекурентното отношение, изписано за n. Ще получим равенството $T(n) - T(n-1) = T(n-1) + n^2 - (n-1)^2$. Опростяваме го до $T(n) = 2T(n-1) + 2n - 1$. Полученото еквивалентно отношение решаваме лесно с метода на характериситчното уравнение. Хомогенната част поражда уравнението $x = 2$, с множество от корени $\{2\}$. Нехомогенната част поражда множеството корени $\{1, 1\}$. Като слеем двете мултимножества, получаваме пълния списък от корени $\{1, 1, 2\}$. Базисните решения са $1^n, n1^n, 2^n$. Последното расте най-бързо, следователно $T(n) = \Theta(2^n)$.

Задача 2 Допускаме противното, нека в G има хамилтонов цикъл. Тогава между всеки два върха u и v на графа има път - участъка от хамилтоновия цикъл между u и v. Аналогично има път и от v до u, следователно всеки два върха са силно свързани и G има само една силно свързана компонента. Стигнахме до противоречие с условието, следователно G не съдържа хамилтонов цикъл.

Задача 3 Да означим върховете на куба с $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2$.

(а) рисуваме квадрат a_1, b_1, c_1, d_1, а вътре в него по-малък квадрат a_2, b_2, c_2, d_2, после свързваме a_1 с a_2, b_1 с b_2 и т.н.

(b) един цикъл е $(a_1, b_1, c_1, d_1, d_2, c_2, b_2, a_2)$.

(c) $\{a_1, c_1, b_2, d_2\}$ е върхово покритие, всяко ребро е покрито от точно един връх от него, следователно е минимално.

(d) ребрата (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2), (d_1, d_2) не се допират и покриват всички върхове, следователно представят максимално съчетание.