КОНТРОЛНО № 1 ПО ИЗБИРАЕМИЯ УЧЕБЕН ПРЕДМЕТ „ЛОГИЧЕСКИ И МАТЕМАТИЧЕСКИ МЕТОДИ“ (СУ „СВЕТИ КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“, ФМИ, 03. XI. 2021 Г.)

Задача 1. Докажете, че неравенството $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{\ldots\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}} < 3$ важи независимо от броя на радикалите.

Задача 2. Какво връща следният алгоритъм, написан на Си?

```
unsigned int f(unsigned int x) {
   unsigned int a = x;
   unsigned int b = 0;
   while (a > 0) { a--; b++; b++; }
   return b;
}
```

Отговорът да се обоснове с инвариант и полуинвариант на цикъла.

РЕШЕНИЯ

Задача 1 се решава с математическа индукция по броя на радикалите. Да положим

$$a_n = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{\ldots\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}}\,,$$

където n е броят на радикалите.

База: $n = 1$. Неравенството $a_1 < 3$, т.е. $\sqrt{6} < 3$, е вярно, защото се получава от вярното неравенство $6 < 9$ чрез коренуване.

Индуктивна стъпка: Нека $a_n < 3$ за някое цяло положително число n. Следователно $a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} < \sqrt{6+3} = \sqrt{9} = 3$, тоест $a_{n+1} < 3$.

Задача 2. Инвариант на цикъла: При всяка проверка на условието `a > 0` важи равенството `2a + b = 2x`.

Доказателство: с математическа индукция по поредния номер на проверката.

База: При първата проверка променливите `a` и `b` имат начални стойности, тоест `a = x` и `b = 0`. Тогава `2a + b = 2x + 0 = 2x`.

Индуктивна стъпка: Нека `2a + b = 2x` при някоя проверка за край, която не е последна. Следователно тялото на цикъла се изпълнява още веднъж. Новите стойности на локалните променливи са `a′ = a − 1` и `b′ = b + 2`. При следващата проверка за край на цикъла важат равенствата

`2a′ + b′ = 2(a − 1) + (b + 2) = 2a − 2 + b + 2 = 2a + b = x`,

тоест `2a′ + b′ = x`, следователно инвариантът отново е в сила.

Полуинвариант на цикъла е числото `a`, тъй като то намалява с единица при всяко изпълнение на тялото на цикъла. Тъй като то е цяло число, а няма безкрайна строго намаляваща редица от цели положителни числа, то все някога стойността на `a` ще стане отрицателно число или нула. Обаче не е възможно да се получи отрицателно число при намаляване на цяло положително число с единица. Ето защо `a` ще стане нула рано или късно и цикълът ще завърши.

Забележка: Числото `b` също е полуинвариант: то нараства с две единици при всяко изпълнение на тялото на цикъла. Само че този полуинвариант е безполезен: от него не следва, че цикълът ще завърши, тъй като няма пречка `b` да нараства до безкрайност (съществува безкрайна строго растяща редица от цели положителни числа, всяко от които е с 2 по-голямо от предишното; такава са например редицата на четните числа и редицата на нечетните числа).

И така, при последната проверка на условието за край на цикъла важат равенствата `2a + b = 2x` (от инварианта, доказан на предишната страница) и `a = 0` (от разсъжденията за полуинварианта). В равенството `2a + b = 2x` заместваме `a = 0` и получаваме `b = 2x`.

След последната проверка на условието за край на цикъла алгоритъмът изпълнява оператора “**`return`** `b`”, който връща числото `b = 2x`.

Отговор: Алгоритъмът връща `2x`.

СХЕМА ЗА ОЦЕНЯВАНЕ

Задача 1 носи 3 точки — по една точка за всяка от следните стъпки:
— база на математическата индукция;
— формулиране на индуктивно предположение и индуктивно заключение;
— провеждане на индуктивна стъпка.

Задача 2 носи 7 точки — по една точка за всяка от следните стъпки:
— формулировка на използваем инвариант;
— база на математическата индукция от доказателството на инварианта;
— индуктивна стъпка от доказателството на инварианта;
— избор на подходящ полуинвариант;
— използване на полуинварианта за доказване, че цикълът ще завърши;
— прилагане на инварианта към последната проверка за край на цикъла;
— формулиране на извод за стойността, върната от алгоритъма.

Точки	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Оценка	2,00	2,33	2,67	3,00	3,25	3,50	4,00	4,50	5,00	5,50	6,00
	Слаб			Среден		Добър		Мн. добър		Отличен	