Метод на предположението

Общи сведения. Прилики и разлики с други методи

Методът на предположението е приспособеният за целите на математиката експериментален подход, известен от природните науки и прилаган в тях. Поначало ролята на експеримента в математиката е ограничена, тъй като той няма доказателствена сила в смисъла на математическо доказателство. Експерименталните доказателства не оставят място за т. нар. *разумно* съмнение, но оставят някаква възможност доказваното твърдение да се окаже грешно и се прилагат в природните науки, където по-голяма сигурност е непостижима. В математиката и в логиката се интересуваме само от такива разсъждения, чиято убедителност е отвъд всяко *възможно* съмнение изобщо, ето защо експерименталните потвърждения нямат доказателствена сила в тези две науки, а единствено евристична роля, т.е. експериментът представлява само източник на правдоподобни предположения (което е достатъчно важно само по себе си).

Експериментът намира ограничено приложение в математически задачи под формата на налучкване ("проба — грешка"). Това е съвсем законен способ за решаване на задачи, но често се избягва, защото страда от два недостатъка: изисква досетливост и резултатите от грешните опити не помагат за намиране на верния отговор.

Методът на предположението гласи: По някакъв начин (може произволно) избираме предполагаем отговор на задачата и проверяваме дали той изпълнява всички изисквания на условието. Ако да — следва, че това е верният отговор. Ако не — поправяме предположението, като вземаме предвид всички сведения, събрани по време на проверката. След краен брой предположения и поправки (а най-често още на втората стъпка) се получава верният отговор.

Методът на предположението има повърхностна прилика с налучкването. В действителност те нямат нищо общо. При метода на предположението няма нужда от досетливост при избиране на първия (грешния) отговор: той се избира произволно (досетливост е нужна само за прехода от грешния към верния отговор, тоест за откриване на логическата връзка между тях, но подобна досетливост е нужна почти във всяка задача).

За да е възможен преходът от грешното към вярното предположение, трябва да разполагаме с количествен критерий за близост между тях. С други думи, нужно е резултатът от проверката на грешното предположение да показва колко е далече то от верния отговор.

На подобни съображения се основава друг подход, малко по-различен — методът на последователните приближения: верният отговор се явява граница на безкрайна сходяща редица, всеки член на която се образува от предишния по един и същи начин.

Методът на предположението дава верния отговор след краен брой стъпки.

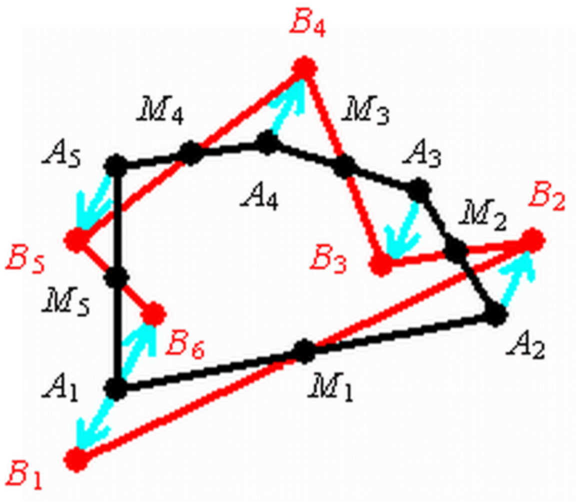
Сходно със споменатите методи е постъпковото решаване на задачи: търсеният обект (обикновено със сложна структура) се строи стъпка по стъпка, като на всеки етап структурата се подобрява в смисъл на приближаване към желаната цел.

Постъпковият подход е сходен с метода на последователните приближения, само че при постъпковото решаване редицата от приближения винаги е крайна и търсеният обект има сложна структура (алгоритъм, стратегия за игра и др.). При метода на последователните приближения се получава безкрайна редица, а нейната граница обикновено е прост обект (число, вектор, функция и др.).

Задачи, решими с метода на предположението

Задача 1. Да се намерят върховете на многоъгълник с нечетен брой страни по дадени среди на страните. Даден е и редът на обхождане на средите.

Решение: Нека $A_1, A_2, \dots, A_n$ са неизвестните върхове на многоъгълника, номерирани например обратно на движението на часовниковата стрелка. Нека $M_1, M_2, \dots, M_n$ са известните среди на страните $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ съответно. Взимаме произволна точка B_1 като предположение за мястото на A_1. За останалите върхове на многоъгълника няма нужда от нови предположения: ако т. B_2 е симетрична на B_1 спрямо M_1, т. B_3 е симетрична на B_2 спрямо M_2 и тъй нататък, то B_k е предполагаемото място на A_k за всяко k. С други думи, ако $B_1 \equiv A_1$, то $B_2 \equiv A_2$, $B_3 \equiv A_3, \dots, B_n \equiv A_n$.



Нека точката B_{n+1} е симетрична на B_n спрямо M_n. Ако предположението за първия връх е било вярно (тоест ако $B_1 \equiv A_1$), то би трябвало $B_{n+1} \equiv B_1 \equiv A_1$. Ако точката B_{n+1} не съвпадне с точката B_1, то предположението е грешно, тоест точката B_1 не е първият връх A_1 на многоъгълника.

Точката M_1 е среда на A_1A_2 (по определение) и на B_1B_2 (по построение), тоест диагоналите на четириъгълника $A_1B_1A_2B_2$ се разполовяват взаимно, следователно той е успоредник. Ето защо

$$\overrightarrow{A_1B_1} = -\overrightarrow{A_2B_2}.$$

Аналогично

$$\overrightarrow{A_1B_1} = -\overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{A_3B_3} = -\overrightarrow{A_4B_4} = \overrightarrow{A_5B_5} = \ldots = \overrightarrow{A_nB_n} = -\overrightarrow{A_1B_{n+1}},$$

тъй като n е нечетно число. От равенството

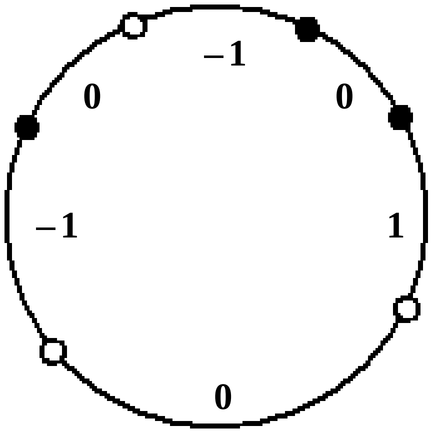
$$\overrightarrow{A_1B_1} = -\overrightarrow{A_1B_{n+1}}$$

следва, че точката A_1 е средата на отсечката B_1B_{n+1}. Открихме първия връх на многоъгълника. Другите му върхове намираме по начина, описан по-горе: т. A_2 е симетрична на A_1 спрямо M_1, т. A_3 е симетрична на A_2 спрямо M_2 и тъй нататък.

Задача 2. Върху окръжност са оцветени $2n$ точки — n в бяло и n в черно. Да се докаже, че съществува място от окръжността, от което броейки точките например обратно на движението на часовниковата стрелка, във всеки миг ще сме преброили не повече черни, отколкото бели точки.

Решение: Оцветените точки разделят окръжността на $2n$ дъги. Всяка дъга надписваме с число, равно на броя на белите минус броя на черните точки, преброени досега. Тези числа зависят от избраната начална дъга (върху нея записваме числото 0). Когато преминаваме от една дъга към следващата, увеличаваме числото с единица, ако общият край на двете дъги е бяла точка, в противен случай намаляваме числото с единица.

Избираме произволна дъга за начална и надписваме останалите дъги според правилото.



Тази дъга е избрана
за начало на броенето.

Да обърнем внимание, че преходът от последната към началната дъга също се подчинява на правилото (в примера от чертежа надписът се увеличава от -1 на 0, защото броенето минава през бяла точка — общия край на дъгите). Това е така, защото за една пълна обиколка по окръжността началното число се увеличава с n единици (по една единица за всяка срещната бяла точка), но и намалява с n единици (по една единица за всяка срещната черна точка); така общото изменение е равно на $+n-n=0$, поради което при достигане на началната дъга се получава същото число, от което е започнало броенето (0). С други думи, началната дъга не се различава по нищо от останалите дъги освен по числото, с което е надписана (нула). Ако в примера от чертежа започнем надписването, да кажем, от горната дъга (с числото -1 вместо 0), то всички дъги ще се окажат надписани както сега; нищо няма да се обърка при прехода през долната дъга, защото тя по нищо не се различава от другите.

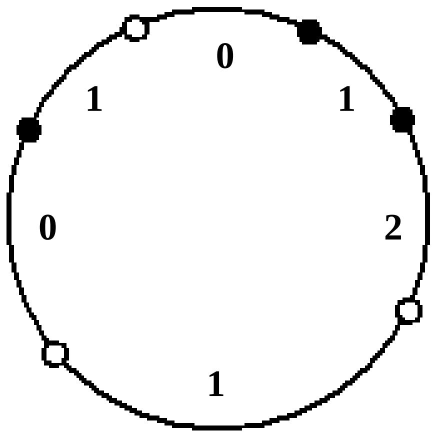
Тъй като искаме във всеки миг преброените бели точки да са не по-малко от преброените черни точки, то надписите на всички дъги трябва да бъдат неотрицателни числа. В примера от чертежа това изискване не е спазено (някои числа са отрицателни), следователно предположението, че долната дъга е подходящо начало на броенето, се е оказало грешно.

Какво ще се промени в надписите, ако изберем някоя друга дъга за начало? Нейният надпис ще се промени от текущата си стойност (да кажем, x) на 0. Всички следващи надписи ще намалеят с x (или ще се увеличат: може $x<0$). Щом изменението ($-x$) е едно и също за всички надписи, то най-малкото число ще остане най-малко, тоест няма да промени мястото си, а само стойността си.

Най-малкото число показва дали началната дъга е била избрана правилно. Искаме да няма отрицателни числа, тоест искаме най-малкото число да е нула (началният надпис). В примера от чертежа това изискване не е изпълнено (най-малкото число е -1), следователно началната дъга е избрана погрешно.

Щом искаме най-малкото число да стане нула, трябва да изберем за начална дъгата с това число (ако има няколко такива дъги, избираме коя да е от тях). Числото върху нея ще стане нула, щом тя е начална; а ще остане най-малко според доказаното в по-предишния абзац. Ето защо новият избор на начало е правилен със сигурност.

В разглеждания пример избираме за начална или горната, или лявата дъга.



В древността методът на предположението е бил прилаган и в алгебрата. Чрез него могат да се решават например уравнения от вида $a\,x = b$.

Задача 3. Към едно число прибавили третината и четвъртината от него. Получили сбор 57. Кое е било числото?

Решение: За да не смятаме с дроби, избираме число, което се дели на 3 и 4, например 12. Това е първото предположение за отговора. Третината на 12 е 4, а четвъртината на 12 е 3. Ако към 12 прибавим 4 и 3, ще получим сбор 19, тоест три пъти по-малко от 57. Между началното число и получения сбор има правопропорционална зависимост, затова увеличаваме предположеното число три пъти: 12 е грешен отговор, обаче 12 . 3 = 36 трябва да е верният отговор. Действително, третината на 36 е 12, а четвъртината на 36 е 9 и 36 + 12 + 9 = 57.

Тази разновидност на метода на предположението е известна под името метод на грешното полагане. Понякога се правят по няколко грешни полагания. Това усложнява метода, а простотата на сметките е голямото му предимство: в примера работихме с малки цели числа, а ако бяхме използвали уравнение, щяхме да привеждаме обикновени дроби под общ знаменател.

Задача 4 (из математическата книга “Логистика” от Йохан Бутеф, 1549 г.) . Цената на 9 ябълки, намалена с цената на една круша, възлиза на 13 денара, а цената на 15 круши, намалена с цената на една ябълка, възлиза на 6 денара. Колко струва една ябълка и колко струва една круша?

Решение: Да предположим, че една ябълка струва 2 денара; заради първото условие една круша струва 5 денара — първо грешно полагане. То е грешно, защото 15 круши без една ябълка струват 15 . 5 – 2 = 73, а не 6 денара.

Увеличаваме цената на една ябълка с 1 денар — от 2 на 3 денара. Заради първото условие цената на една круша нараства с 9 денара — от 5 на 14 денара. Това (3 и 14 денара) е второто грешно полагане: сега цената на 15 круши, намалена с цената на една ябълка, възлиза на 15 . 14 – 3 = 207, а не 6 денара.

Такава стъпка (поскъпването на ябълката с 1 денар, а на крушата с 9 денара) увеличава резултата по второто условие с 207 – 73 = 134 денара. Искаме намаление на този резултат със 73 – 6 = 67 денара = половината на 134, затова правим половин стъпка в обратна посока: ябълката поевтинява с 0,5 денара, а крушата — с 4,5 денара (спрямо първото грешно полагане).

Отговор: Една ябълка струва 1,5 денара, а една круша струва 0,5 денара.

С усложняване на задачата расте броят на грешните полагания и сметките стават все по-дълги. Затуй методът на грешното полагане е приложим само към прости задачи и е бил изоставен след разработване на теорията на уравненията. Днес представлява само исторически интерес. Прилага се при решаване наум на прости задачи (линейни уравнения) с неприятни (дробни) коефициенти.

Метод на последователните приближения

По метода на последователните приближения се решават някои уравнения. За целта даденото уравнение се записва във вида $f(x) = x$. Търсеният корен x се получава като граница на безкрайна редица от последователни приближения: $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$, където началното приближение x_0 се избира по подходящ начин в зависимост от другите условия на задачата, а всеки следващ член на редицата се получава по формулата $x_{n+1} = f(x_n)$.

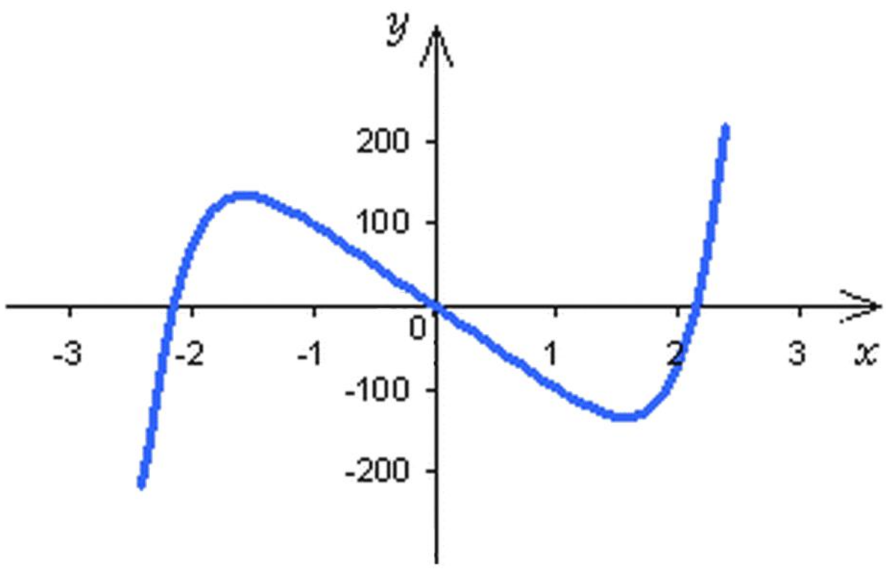
При различен избор на началното приближение x_0 се получават различни редици — сходящи ту към един, ту към друг корен на уравнението, а може да се получи и разходяща редица. Затова началното приближение x_0 се избира след изследване на f; иначе методът не гарантира сходимостта на редицата.

Недостатък на метода е получаването на приблизителен отговор: $x \approx x_n$ за достатъчно големи n. Изключение е да получим явна формула за общия член и от нея да намерим границата на редицата в явен вид.

Предимство на метода е неговата широка приложимост. Променливата x може да бъде крайномерен вектор (точка в многомерно пространство), тогава f е функция на повече от един аргумент. На свой ред f може да е крайномерен вектор, т.е. крайна редица от функции; тогава уравнението се превръща в система от скаларни уравнения. Най-сетне, може x да е функция, а f да е изображение, което на функция съпоставя функция; тогава е налице функционално уравнение в широк смисъл (вкл. диференциално или интегрално уравнение) или пък система от такива уравнения.

Задача 1. Да се реши в реални числа алгебричното уравнение $x^7 - 100x = 5$.

Решение: Като изследваме функцията в лявата страна на уравнението, забелязваме, че то има три реални корена: около нулата и около числата ± 2.



Да запишем даденото уравнение във вида $x^7 - 99x - 5 = x$. Оттук възниква рекурентната формула $x_{n+1} = (x_n)^7 - 99x_n - 5$. Избираме x_0 близо до някой от корените, например $x_0 = 0$. Тогава получаваме редицата

$$x_0 = 0, \quad x_1 = -5, \quad x_2 = -77635, \quad x_3 \approx -1{,}7 \,.\, 10^{34} \quad \text{и т.н.}$$

Тя изглежда разходяща, т.е. от нея не можем да намерим корен. Ако опитаме с друго начално приближение, например $x_0 = 2$, ще получим редицата

$$x_0 = 2, \quad x_1 = -75, \quad x_2 \approx -1{,}2 \,.\, 10^{13} \quad \text{и т.н.}$$

Тук разходимостта проличава още по-скоро.

Ако обаче запишем уравнението така: $x = \dfrac{x^7 - 5}{100}$, рекурентната зависимост ще бъде друга: $x_{n+1} = \dfrac{(x_n)^7 - 5}{100}$. При $x_0 = 0$ се получава следната редица:

$$x_0 = 0, \quad x_1 \approx -0{,}05, \quad x_2 \approx -0{,}05, \quad x_3 \approx -0{,}05 \quad \text{и т.н.}$$

Следователно единият от трите корена на уравнението е приблизително $-0{,}05$ с точност до стотни (в действителност приближението е много по-точно: няколко цифри след петицата са все нули).

Обаче при $x_0 = 2$ се получава следната редица:

$$x_0 = 2, \quad x_1 \approx 1{,}23, \quad x_2 \approx -0{,}0074, \quad x_3 \approx -0{,}05 \quad \text{и т.н.}$$

(следващите стойности са много близки до $-0{,}05$). Така отново получаваме вече намерения корен $-0{,}05$, а не корена, който е близо до числото 2. Ако увеличим малко началното приближение, например $x_0 = 2{,}2$, то редицата става разходяща:

$$x_0 = 2{,}2, \quad x_1 \approx 2{,}44, \quad x_2 \approx 5{,}16, \quad x_3 \approx 978{,}94 \quad \text{и т.н.}$$

Подобно е положението в околност на точката -2.

Сега да запишем уравнението във вида $x = \sqrt[7]{100x + 5}$. Оттук стигаме до рекурентната формула $x_{n+1} = \sqrt[7]{100x_n + 5}$. При $x_0 = 2$ от нея получаваме:

$$x_0 = 2, \quad x_1 \approx 2{,}14, \quad x_2 \approx 2{,}16, \quad x_3 \approx 2{,}16 \quad \text{и т.н.}$$

При $x_0 = -2$ се получава друга редица:

$$x_0 = -2, \quad x_1 \approx -2{,}12, \quad x_2 \approx -2{,}14, \quad x_3 \approx -2{,}15 \quad \text{и т.н.}$$

(следващите членове са много близки до $-2{,}145986$). Обаче последната рекурентна формула не е удобна за намиране на корена близо до нулата (вместо него получаваме някой от другите два корена).

И тъй, уравнението $x^7 - 100x = 5$ притежава само три реални корена; с точност до стотни те са равни на $-0{,}05$, $-2{,}15$ и $2{,}16$.

Както забелязваме, методът на последователните приближения притежава следния недостатък: дори когато началното приближение се намира близо до някой корен на уравнението, редицата от приближения може да не клони към този корен (а да клони към някой друг корен или даже да е разходяща). Едно и също уравнение може да бъде записано по най-различни начини, откъдето се получават и различни рекурентни формули, а методът се оказва чувствителен към избора на рекурентна формула.

Задача 2. Намерете функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, за която $f'(x) = f(x)$ и $f(0) = 1$.

Решение: Това диференциално уравнение е с отделящи се променливи и може да се реши по метода, разработен за такива уравнения. Можем също да налучкаме отговора: $f(x) = e^x$, тъй като уравнението е достатъчно просто. (Решението е единствено; това следва от известни теореми.) Но има задачи, в които диференциалното уравнение не е от никой специален вид (тоест няма известен метод за точното му решаване) и решението не може да се налучка. Тогава се прилага методът на последователните приближения.

Условието $f(0) = 1$ ни подсказва да изберем за начално приближение константата 1, тоест $f_0(x) = 1$.

От диференциалното уравнение $f'(x) = f(x)$ можем да изведем рекурентна зависимост по два начина.

Първи начин: $f_{n+1}(x) = f_n'(x)$. Така получаваме функционалната редица

$$f_0(x) = 1, \qquad f_1(x) = 0, \qquad f_2(x) = 0, \qquad f_3(x) = 0 \qquad \text{и т.н.}$$

Границата на редицата е константата 0, т.е. $f(x) = 0$. Наистина, тази функция удовлетворява диференциалното уравнение (тя съвпада с производната си), обаче не удовлетворява условието $f(0) = 1$.

Втори начин: $f_n(x) = f_{n+1}'(x)$, т.е. $f_{n+1}(x) = \int f_n(x)\,dx$. За да бъде изпълнено и условието $f(0) = 1$, се избира подходяща интеграционна константа или (което е същото) подходящи граници на интеграла, а именно

$$f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t)\,dt\,.$$

По този начин се получава функционалната редица:

$$f_0(x) = 1, \qquad f_1(x) = 1 + x, \qquad f_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \qquad f_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \qquad \text{и т.н.}$$

Можем да спрем където да е и да вземем текущото приближение за отговор:

$$f(x) \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\,.$$

Заради простотата на отговора тази задача се нарежда сред изключенията: можем да получим явна формула за общия член на редицата.

Действително, не е трудно да се докаже (чрез математическа индукция), че

$$f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\,.$$

Границата на тази редица се получава във вид на сума на безкраен ред:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Безкрайният ред в дясната страна е известен: сумата му е e^x, тоест $f(x) = e^x$.

Извод: Когато прилагаме метода на последователните приближения към диференциално уравнение, е по-добре да съставим рекурентно уравнение с помощта на интегриране, а не диференциране.

Използвахме една от формулите за развиване на функция в степенен ред. Такива формули има за всички основни елементарни функции. Ето някои:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \text{ за всяко } x \in (-\infty\,;+\infty);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \text{ за всяко } x \in (-\infty\,;+\infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \text{ за всяко } x \in (-\infty\,;+\infty);$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots \text{ за всяко } x \in (-1\,;+1);$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots \text{ за всяко } x \in [-1\,;+1);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \ldots \text{ за всяко } x \in (-1\,;+1];$$

и др.

Тези формули се доказват в математическия анализ и са изключително важни за математиката и информатиката. В математиката имат много приложения (по-горе с тяхна помощ решихме диференциално уравнение). В програмирането те се използват за пресмятане на основните елементарни функции. Известно е, че процесорите могат да извършват само четирите аритметични действия: събиране, изваждане, умножение и деление. Действието степенуване се свежда до умножение (има бързо степенуване — многократно повдигане на квадрат). В дясната страна на формулите участват само операции, които могат да бъдат изпълнени от процесора. Така може да се изчисли всяка известна функция. Разбира се, сумирането продължава не до безкрайност, а до някакво място, тоест резултатът е приблизителен, но това не е проблем, тъй като поначало дробните числа се представят в компютрите приблизително.

Постъпково решаване на задачи

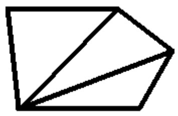
Характерно за този подход е, че търсеният обект има сложна структура — алгоритъм, стратегия за игра и др. Решението се построява стъпка по стъпка, като на всеки етап структурата се подобрява по малко.

Постъпковият подход е сходен с метода на последователните приближения, само че при постъпковото решаване редицата от приближения винаги е крайна. При метода на последователните приближения се получава безкрайна редица.

В геометрични задачи за разрязване на фигури понякога може да се прилага постъпково разрязване, което е частен случай на метода.

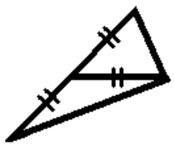
Задача 1 (конкурсна задача 3 за по-малките ученици, сп. “Математика”, бр. 2/1989 г.). Да се докаже, че всеки изпъкнал многоъгълник може да се разреже на равнобедрени триъгълници.

Решение (от бр. 4/1989 г. на сп. “Математика”):



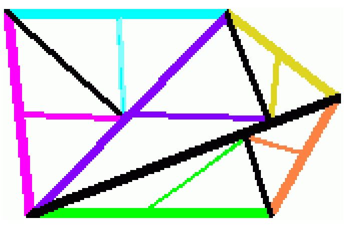
Първо, разрязваме изпъкналия многоъгълник на триъгълници, например чрез диагоналите през един връх. (Всеки многоъгълник, не непременно изпъкнал, може да се разреже на триъгълници, но доказателството е по-сложно. Така че твърдението на задачата е вярно и за неизпъкнали многоъгълници.)

Второ, всеки триъгълник може да се разреже на правоъгълни триъгълници чрез височината към най-голямата страна. Важно е да уточним за коя височина става дума, защото не всяка височина лежи в триъгълника. Обаче срещу най-голямата страна се намира най-големият ъгъл, който единствен може да е тъп или прав; другите два върха на триъгълника непременно са остри, ето защо височината към най-голямата страна лежи вътре в триъгълника. Така получаваме разрязване на многоъгълника на множество от правоъгълни триъгълници.



Трето, всеки правоъгълен триъгълник може да се разреже на равнобедрени триъгълници чрез медианата към хипотенузата (както знаем, тя е равна на половината хипотенуза). По този начин разрязахме многоъгълника на равнобедрени триъгълници.

Примерно изпълнение на стъпките върху един многоъгълник (равните бедра са боядисани с еднакъв цвят, различен от черно):



Постъпковото решаване на задачи може да се прилага в две посоки: отдолу нагоре и отгоре надолу. Задача 1, решена отдолу нагоре, изглежда така:

1) Всеки правоъгълен триъгълник може да се разреже на равнобедрени триъгълници чрез медианата към хипотенузата. Затова остава да покажем, че всеки изпъкнал многоъгълник се разрязва на правоъгълни триъгълници.

2) Всеки триъгълник може да се разреже на правоъгълни триъгълници чрез височината към най-голямата страна. Ето защо остава да покажем, че всеки изпъкнал многоъгълник може да се разреже на триъгълници.

3) Всеки изпъкнал многоъгълник може да се разреже на триъгълници чрез прекарване на всички диагонали през един връх.

Макар и верен, подходът отдолу нагоре носи риск: всяка от стъпките може да се окаже погрешна. Например на първата стъпка би могло да се окаже, че не всеки изпъкнал многоъгълник се разрязва на правоъгълни триъгълници. В тази задача разрязването се оказва възможно, но това е късмет.

Посоката отгоре надолу е безопасна:

1) Всеки изпъкнал многоъгълник може да се разреже на триъгълници чрез прекарване на всички диагонали през един връх. Затова остава да покажем, че всеки триъгълник може да се разреже на равнобедрени триъгълници.

2) Всеки триъгълник може да се разреже на правоъгълни триъгълници чрез височината към най-голямата страна. Ето защо остава да покажем, че всеки правоъгълен триъгълник се разрязва на равнобедрени триъгълници.

3) Всеки правоъгълен триъгълник може да се разреже на равнобедрени триъгълници чрез медианата към хипотенузата.

Няма риск от грешка, защото всяка стъпка е от общото към частното. На първата стъпка общият случай (изпъкнал многоъгълник) се свежда до частния случай (триъгълник). Но ако задачата изобщо може да се реши, тоест ако твърдението е вярно за всеки изпъкнал многоъгълник, то трябва да е вярно и за всеки триъгълник, а също и за всеки правоъгълен триъгълник.

Следователно подходът отгоре надолу е за предпочитане.

Задача 2. Докажете, че всеки (изпъкнал) многоъгълник може да се разреже на квадрати и правоъгълни триъгълници в отношение на бройките 1 : 2.

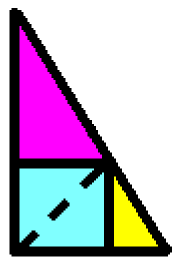
Решение: Първите две стъпки са като в предишната задача:

1) Всеки изпъкнал многоъгълник може да се разреже на триъгълници чрез диагоналите през един връх.

2) Всеки триъгълник може да се разреже на правоъгълни триъгълници чрез височината срещу най-голямата страна.

Третата стъпка е различна:

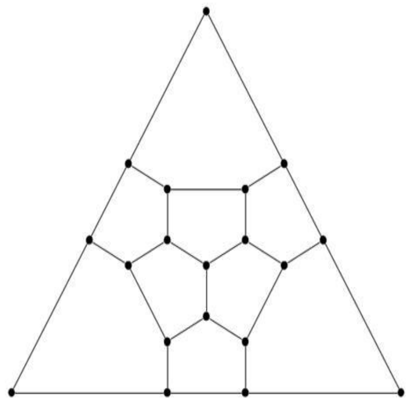
3) Всеки правоъгълен триъгълник може да се разреже на един квадрат и два триъгълника: през точката, в която ъглополовящата към хипотенузата пресича хипотенузата, прекарваме разрези, успоредни на катетите.



Задача 3. Докажете, че всеки (изпъкнал) многоъгълник може да се разреже на изпъкнали петоъгълници.

Решение: Първата стъпка отново е разрязване на изпъкналия многоъгълник на триъгълници чрез прекарване на всички диагонали през един връх.

На втората стъпка разрязваме всеки триъгълник на изпъкнали петоъгълници, както е показано на чертежа.



Не само задачи за разрязване на геометрични фигури, а и други задачи могат да се решават постъпково.

Задача 4 (дадена на контролното за определяне на българските участници в VIII Балканска олимпиада по математика). Развален компютър пресмята само сбор, разлика и реципрочна стойност. Докажете, че с негова помощ може да се пресметне произведението на две числа.

Решение: Развaленият компютър може да пресметне израза

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)},$$

после реципрочната стойност на този израз, тоест $x(x + 1) = x^2 + x$. След това може да извади x от този израз и остава x^2. Така компютърът може да пресмята квадрата на произволно число.

Компютърът може да пресмята и половинката на число по формулата

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x}}$$

(тя важи за $x \neq 0$, а случая $x = 0$ програмираме отделно, като взимаме предвид, че половината на 0 е 0).

Щом компютърът може да пресмята квадрати и половинки, то той може да пресмята и произведения по формулата

$$xy = \frac{(x+y)^2 - x^2 - y^2}{2}.$$

Задача 5 (от рубриката "Занимателна математика" на сп. "Математика", бр.5 / 1986 г.). Али Баба иска да влезе в приказната пещера със съкровища. Пред нея има бъчва, на чийто капак са пробити четири отвора, разположени във върховете на квадрат. Под отворите са поставени делви, във всяка от които има по една риба с опашка, обърната нагоре или надолу. Ако опашките на всички риби са насочени в една и съща посока, вратата на пещерата се отваря. Али Баба може да провре ръцете си в произволно избрани два отвора, да определи положението на рибите в делвите под избраните отвори и евентуално да завърти едната или двете риби. След като Али Баба извади ръцете си от отворите, бъчвата се завърта бързо и спира, при което Али Баба не може да определи новото положение на бъчвата спрямо старото (т.е. не знае кой отвор къде е бил преди завъртането). Ако сега опашките на рибите сочат в една посока, вратата на пещерата се отваря. В противен случай Али Баба може да направи следващ опит. Има ли сигурен начин той да влезе в пещерата?

Решение: Има такъв начин:

1) Най-напред Али Баба бръква в два съседни отвора на бъчвата (т.е. отвори, разположени по страна на квадрата) и поставя двете риби с опашките нагоре.

2) После бръква по диагонал. Едната риба (въпреки че не се знае коя точно) е от предишните две, затова е с опашката нагоре. Тоест има две възможности: или двете риби са с опашките нагоре, или едната риба е с опашката нагоре, а другата — надолу. Във втория случай Али Баба обръща втората риба така, че опашката ѝ да сочи нагоре. Ако вратата на пещерата все още не се отваря, това значи, че три риби са с опашките нагоре, а една риба е с опашката надолу.

3) На третия ход Али Баба бръква по диагонал. Ако едната опашка сочи надолу, завърта тази риба с опашката нагоре и вратата на пещерата се отваря. Ако и двете опашки сочат нагоре, завърта едната от тях надолу. Сега е сигурно, че две опашки сочат надолу и две — нагоре, като опашките с еднакви посоки са съседни (намират се по страна на квадрата).

4) После Али Баба бръква в две съседни делви (по страна на квадрата). Ако опашките са с еднакви посоки, обръща двете риби и вратата се отваря. В противен случай пак обръща двете риби, но вратата не се отваря, защото две опашки сочат нагоре и две — надолу; но сега опашките с еднакви посоки се намират в делви, разположени диагонално.

5) Али Баба бръква по диагонал и обръща двете риби. Сега четирите опашки сочат в една посока и вратата се отваря.

Това решение е постъпково не защото се състои от стъпки (същото важи за всеки алгоритъм), а защото на всяка стъпка разположението на опашките се подобрява. Подобрението трудно се поддава на формално описание. Неформално казано, разположението на опашките става все по-симетрично и все по-независимо от загубата на информация при завъртането на бъчвата.