Домашно №1 по Дискретни Структури на специалност Компютърни науки, 2 поток, зимен семестър 2020/2021г., 8 ноември 2021 г.

Име: .... ФN°: .... Група: ..

Задача	1	2	3	4	Макс.
получени точки					
от максимално	25	25	25	25	100

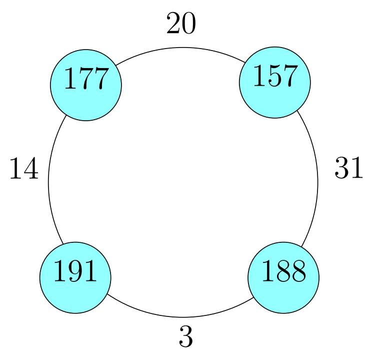
Задача 1: 2021 каубои са застанали в равнината по такъв начин, че разстоянието между всеки двама от тях е различно. Тоест, ако с $d(i, j)$ означим разстоянието между каубоите с индекси i и j, където $i \neq j$, то

$$\forall x, y, z, w \in \{1, 2, ..., 2021\}, x \neq y : d(x, y) = d(z, w) \rightarrow (x = z \wedge y = w) \vee (x = w \wedge y = z)$$

В един и същ момент, всеки от каубоите стреля по каубоя, намиращ се най-близко до него (*напълно възможно е двама каубои да се застрелят взаимно*). Докажете, че има поне един каубой, по когото никой не стреля.

Задача 2: n души седят около кръгла маса. *Дискомфортът между двама души* е абсолютната разлика на височините им. *Общия дискомфорт* на масата е равен на сумата на дискомфортите между хората седящи на съседни места.

Нека означим височините на хората с h_1, h_2, ..., h_n, като $h_1 \leq h_2 \leq ... \leq h_n$. Колко е минималният общ дискомфорт, който може да се достигне при подходящо нареждане на хората около масата? Дайте пример за едно такова нареждане.



Фигура 1: пример с четирима души

Тази фигура илюстрира задачата. Върху всяко място е написана височината на седящия на него човек. Общият дискомфорт на масата е $20 + 31 + 3 + 14 = 68$. Това е и минималният общ дискомфорт за този случай.

Задача 3: В множеството на наредените двойки от цели **положителни** числа разглеждаме бинарната релация R, дефинирана по следния начин:

$$(a,b)R(c,d) \iff ad = bc$$

а) Докажете, че R е релация на еквивалентност.
б) Какво е множеството от класовете на еквивалентност на R: крайно, изброимо безкрайно или неизброимо? Обосновете отговора си.

Задача 4: Нека S е крайно множество и $f : S \to S$ е биекция. С f^n означаваме $(n-1)$-кратната композиция на f със себе си. Индуктивната дефиниция е следната:

$$f^1(x) = f(x)$$
$$f^n(x) = f(f^{n-1}(x)) \text{ за } n > 1$$

а) Докажете, че $\exists n \in \mathbb{N}$, такава че $f^{-1} = f^n$, където f^{-1} е обратната функция на f.
б) Дайте пример за биекция $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, за която предното твърдение не е вярно.