

ТЕМА: ИНДУКЦИЯ. РЕЛАЦИИ. ФУНКЦИИ.
КОМБИНАТОРИКА

Задача 1: (10т.) Използвайте метода на математическата индукция за да докажете следното твърдение:

$$3 + 11 + \dots + (8n - 5) = 4n^2 - n, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

Задача 2: (10т.) Използвайте метода на математическата индукция за да докажете следното твърдение:

$$2^n > n^2, n \in \mathbb{N}, n \geq 5$$

Задача 3: (12т.) Релацията R в множеството на целите числа \mathbb{Z} е определена по следния начин: $R = \{(x, y) | x - y \text{ е четно число}\}$. Докажете, че R е релация на еквивалентност и намерете класовете ѝ на еквивалентност.

Задача 4: (12т.) Дадено е множеството $A = \{a, b, c, d\}$ и дефинираната в него бинарна релация:

$$R = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, b), (c, c), (c, a), (c, b), (c, d), (d, d)\}$$

а)(4т.) Представете релацията с матрица;

б)(6т.) Изследвайте свойствата на релацията;

в)(2т.) Определете вида на релацията.

Задача 5: (10т.) Докажете, че функцията $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ е биекция, където:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{ако } x \text{ е четно} \\ \frac{x+1}{2} & \text{ако } x \text{ е нечетно} \end{cases}$$

Задача 6: (15т.) Нека A е множеството на всички двоични низове с дължина най-много 10, а \mathbb{N} - множеството на естествените числа. Функцията $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ съпоставя на всеки двоичен низ число такова, че двоичният низ е негово представяне в двоична позиционна бройна система.

а)(9т.) Проверете дали функцията е инекция и сюрекция;

б)(6т.) Намерете множество $B \subseteq \mathbb{N}$ такова, че функцията $f : A \rightarrow B$ е сюрекция.

Задача 7: (14т.) Дадена е колода от 52 карти, от която се правят извадки, всяка от които е ненаредена комбинаторна конфигурация без повторение.

а) (7т.) Да се определи броят на извадките от 8 карти, като всяка извадка съдържа по 2 карти от всеки цвят;

б) (7т.) Да се определи по колко начина може да се раздадат всичките карти на 5 играча p_1, p_2, \dots, p_5 така, че всеки от p_1 и p_2 да получи по 15 карти, p_3 да получи 5 карти, p_4 да получи 8 карти и p_5 да получи 9 карти.

Задача 8: (17т.) Дадена е азбуката $A = \{a, b, c\}$. Да се намери броят на думите с дължина 10 над тази азбука, които изпълняват следните условия:

а) (10т.) Броят на буквите a е по-голям от броя на буквите b ;

б) (7т.) Всяка дума съдържа 3 букви a и буквите на думата са в намаляващ ред.