Контролно №1 по Дискретни Структури, спец. Информатика, 25.04.2013г.

Име .... ф№.......... гр....

Вариант I

Задача	**1**	**2**	**3**	**4а**	***4б, бонус***	**5**	**6а**	***6б, бонус***	**Макс.**
получени точки									
от максимално	16	16	18	14	*18*	22	14	*18*	100

Задача 1: Използвайки табличния метод, проверете валидността на еквивалентността: $p \to (q \vee r) \equiv (p \to q) \vee (p \to r)$

Решение:

p	q	r	$q \vee r$	$A = p \to (q \vee r)$	$p \to q$	$p \to r$	$B = (p \to q) \vee (p \to r)$	$A \leftrightarrow B$
F	F	F	F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F	T
T	F	T	T	T	F	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T	T
T	T	T	T	T	T	T	T	T

Изразите са еквивалентни, защото $A \leftrightarrow B$ е тавтология.

Задача 2: Дадени са множествата: $U = \{a, 1, b, 2, c, 3, d, 4\}$, $A = \{a, c, 1, d\}$, $B = \{2, b, c, 1\}$. Да се намери броят на елементите на множеството $X = 2^{\overline{A \cap B}^U} \times 2^{\overline{A \cup B}^U}$.

Решение:

$|X| = |2^{\overline{A \cap B}^U} \times 2^{\overline{A \cup B}^U}| = |2^{\overline{A \cap B}^U}| \times |2^{\overline{A \cup B}^U}| = 2^{|\overline{A \cap B}^U|} \times 2^{|\overline{A \cup B}^U|} = 2^{(|U| - |A \cap B|)} \times 2^{(|U| - |A \cup B|)} = 2^{(|U| - |A \cap B| + |U| - |A \cup B|)} = 2^{(|U| - |A \cap B| + |U| - |A| - |B| + |A \cap B|)} = 2^{(2|U| - |A| - |B|)} = 2^{(16-4-4)} = 2^8 = 256$

Задача 3: Използвайте метода на математическата индукция за да докажете следното твърдение:

$$3 + 3 \times 5 + 3 \times 5^2 + ... + 3 \times 5^n = \frac{3 \times (5^{n+1} - 1)}{4}, n \in \mathbb{N}$$

Решение:

1. Ще докажем, че твърдението е вярно за $n = 0$.
   Наистина: $3 = \dfrac{3 \times (5^1 - 1)}{4}$

2. Допускаме, че твърдението е вярно за някое число $k, k \in \mathbb{N}$.

3. Ще докажем, че твърдението е вярно за $k+1$. Наистина:
$3 + 3 \times 5 + 3 \times 5^2 + ... + 3 \times 5^{k+1} =$
$= \dfrac{3 \times (5^{k+1} - 1)}{4} + 3 \times 5^{k+1} = \dfrac{3 \times (5^{k+1} - 1) + 12 \times 5^{k+1}}{4} =$
$= \dfrac{3 \times (5^{k+1} - 1 + 4 \times 5^{k+1})}{4} = \dfrac{3 \times (5^{k+2} - 1)}{4}$

4. Заключение: Твърдението е вярно за всяко число $n \in \mathbb{N}$.

Задача 4: Дадено е множеството $A = \{a, b, c, d, e\}$ и релацията $R \subseteq A \times A$, зададена със следната матрица:

	a	b	c	d	e
a	1	1	0	1	1
b	0	1	0	0	1
c	1	1	1	1	1
d	0	1	0	1	0
e	0	0	0	1	1

а) Докажете, че релацията е рефлексивна и силно антисиметрична;

Решение: Релацията е рефлексивна. Наистина, за всеки елемент x на множеството A е изпълнено xRx. Това следва от факта, че всички елементи по главния диагонал на матрицата, представяща релацията са единици, т.е. тя съдържа всички наредени двойки от вида $(x, x), x \in A$.

Релацията е силно антисиметрична, защото за всеки два елемента $x, y \in A, x \neq y$, точно една от наредените двойки (x, y) и (y, x) принадлежи на релацията R. Това следва от факта, че елементите на матрицата, които са симетрични относно главния диагонал, имат различни стойности.

б) Намерете броя на всички релации $R \subseteq A \times A$, които имат свойствата рефлексивност и силна антисиметричност.

Решение: За да намерим броя на релациите с исканите свойства ще разгледаме тяхното представяне с матрици. Матрицата, представяща рефлексивна релация, има единици по главния диагонал, а за матрицата на силно антисиметрична релация е характерно, че симетричните относно главния диагонал елементи имат различни стойности. Следователно, нашата задачата се свежда до намиране броя на матриците с 5 реда и 5 стълба, които имат единици по главния диагонал и различни елементи, симетрични относно същия диагонал. Но такава матрица се определя еднозначно от елементите си само над главния диагонал, а те са $\frac{5^2-5}{2} = 10$. И тъй като всеки елемент може да приема две стойности, то броят на търсените матрици е 2^{10}.

Задача 5: Функцията $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е дефинирана по следния начин: $f(x, y) = 2x + y$. Проверете дали функцията е инекция, сюрекция, биекция.

Решение: Функцията е биекция, ако е инекция и сюрекция.

1. Ще проверим дали функцията е инекция, т.е. дали за всеки два елемента $x_1, x_2 \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

   Нека $x_1 = (2, 2), x_2 = (3, 0)$. Очевидно $x_1 \neq x_2$, но $f(x_1) = f(x_2)$.

   Следователно, функцията не е инекция.

2. Ще проверим дали функцията е сюрекция, т.е. дали $\forall y \in \mathbb{N} : \ \exists x \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, такова че $f(x) = y$.

   Нека $y \in \mathbb{N}$.

   а) Нека y е четно, т.е. $y = 2k, k \in \mathbb{N}$. Тогава $x \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, x = (k, 0)$ е такова, че $f(x) = f(k, 0) = y$.

   б) Нека y е нечетно, т.е. $y = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$. Тогава $x \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, x = (k, 1)$ е такова, че $f(x) = f(k, 1) = y$.

   Следователно, функцията е сюрекция.

Изследваната функция е сюрекция, но не е инекция, следователно не е биекция.

Задача 6: Да се намери броят на целите положителни десетични числа с дължина 20, такива че:

а) В записа на всяко число от ляво надясно: във всяка позиция с нечетен номер има нечетна цифра, а във всяка позиция с четен номер – четна цифра;

Решение: Всяко число е наредена комбинаторна конфигурация с повторение. В 10 позиции с нечетен номер 5 нечетни цифри може да се разположат по 5^{10} начина. За всеки избор на цифри за нечетните позиции в останалите 10 позиции с четни номера 5 четни цифри може да се разположат по 5^{10} начина.
Следоветлно, броят на числата, които отговарят на условето, е $5^{10} \times 5^{10} = 5^{20}$.

б) В записа на всяко число цифрите, от ляво надясно, са във възходящ ред.

Решение: На всяко такова число:

$$\underbrace{1...1}_{a_1}\underbrace{2...2}_{a_2}\underbrace{3...3}_{a_3}\underbrace{4...4}_{a_4}\underbrace{5...5}_{a_5}\underbrace{6...6}_{a_6}\underbrace{7...7}_{a_7}\underbrace{8...8}_{a_8}\underbrace{9...9}_{a_9}$$

където $\sum_{i=1}^{9} a_i = 20$ и $0 \leq a_i \leq 20, 1 \leq i \leq 9$, еднозначно съответства двоичен вектор с дължина 29 от вида:

$$\underbrace{1...1}_{a_1}0\underbrace{1...1}_{a_2}0\underbrace{1...1}_{a_3}0\underbrace{1...1}_{a_4}0\underbrace{1...1}_{a_5}0\underbrace{1...1}_{a_6}0\underbrace{1...1}_{a_7}0\underbrace{1...1}_{a_8}0\underbrace{1...1}_{a_9}0$$

Следователно, броят на числата, които отговарят на условието, е равен на броя на двоичните вектори с дължина 29, всеки от които има 9 нули, като последната координата е нула, а именно $\binom{20+(9-1)}{20} = \binom{20+(9-1)}{9-1} = \binom{28}{8} = \frac{28!}{8! \times 20!}$.