Контролно №1 по Дискретни Структури, спец. Информатика, 25.04.2013г.

Име .... ф№.......... гр....

Вариант II

Задача	**1**	**2**	**3**	**4а**	***4б,бонус***	**5**	**6а**	***6б,бонус***	**Макс.**
получени точки									
от максимално	16	16	18	14	*18*	22	14	*18*	100

Задача 1: Използвайки табличния метод, проверете валидността на еквивалентността: $p \to (q \oplus r) \equiv (p \to q) \oplus (p \to r)$

Решение:

p	q	r	$q \oplus r$	$A = p \to (q \oplus r)$	$p \to q$	$p \to r$	$B = (p \to q) \oplus (p \to r)$	$A \leftrightarrow B$
F	F	F	F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T	T	F	F
F	T	F	T	T	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	F	F
T	F	F	F	F	F	F	F	T
T	F	T	T	T	F	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T	T
T	T	T	F	F	T	T	F	T

Изразите не са еквивалентни, защото $A \leftrightarrow B$ не е тавтология.

Задача 2: Дадени са множествата: $U = \{a, 4, b, 3, c, 2, d, 1\}$, $X = \{c, 2, b, 1\}$, $Y = \{d, a, 1\}$. Да се намери броят на елементите на множеството $A = 2^{\overline{X \cap Y}^U \times \overline{X \cup Y}^U}$.

Решение:

$|A| = |2^{\overline{X \cap Y}^U \times \overline{X \cup Y}^U}| = 2^{|\overline{X \cap Y}^U \times \overline{X \cup Y}^U|} = 2^{|\overline{X \cap Y}^U| \times |\overline{X \cup Y}^U|} = 2^{(|U \setminus X \cap Y|) \times (|U \setminus X \cup Y|)} = 2^{(|U| - |X \cap Y|) \times (|U| - |X| - |Y| + |X \cap Y|)} = 2^{(8 - |\{1\}|) \times (8 - 4 - 3 + |\{1\}|)} = 2^{7 \times 2} = 2^{14} = 16384$

Задача 3: Използвайте метода на математическата индукция за да докажете следното твърдение:

$$2 - 2 \times 7 + 2 \times 7^2 + ... + 2 \times (-7)^n = \frac{1 - (-7)^{n+1}}{4}, n \in \mathbb{N}$$

Решение:

1. Ще докажем, че твърдението е вярно за $n = 0$.
   Наистина: $2 = \dfrac{1 - (-7)^1}{4}$

2. Допускаме, че твърдението е вярно за някое число $k, k \in \mathbb{N}$.

3. Ще докажем, че твърдението е вярно за $k+1$. Наистина:
$2 - 2 \times 7 + 2 \times 7^2 + ... + 2 \times (-7)^{k+1} =$
$$= \frac{1-(-7)^{k+1}}{4} + 2 \times (-7)^{k+1} = \frac{1-(-7)^{k+1} + 8 \times (-7)^{k+1}}{4} =$$
$$= \frac{1+7 \times (-7)^{k+1}}{4} = \frac{1-(-7) \times (-7)^{k+1}}{4} = = \frac{1-(-7)^{k+2}}{4}$$

4. Заключение: Твърдението е вярно за всяко число $n \in \mathbb{N}$.

Задача 4: Дадено е множеството $X = \{x, y, z, s, t\}$ и релацията $R \subseteq X \times X$, зададена със следната матрица:

	x	y	z	s	t
x	0	0	1	0	0
y	0	0	1	1	0
z	1	1	0	0	1
s	0	1	0	0	1
t	0	0	1	1	0

а) Докажете, че релацията е антирефлексивна и симетрична;

Решение: Релацията е антирефлексивна. Наистина, за всеки елемент a на множеството X е изпълнено $(a, a) \notin R$. Това следва от факта, че всички елементи по главния диагонал на матрицата, представяща релацията са нули.

Релацията е симетрична, защото за всеки два елемента $a, b \in X, a \neq b$, ако $(a, b) \in R$, то и $(b, a) \in R$. Това следва от факта, че елементите на матрицата, които са симетрични относно главния диагонал са равни.

б) Намерете броя на всички релации $R \subseteq X \times X$, които имат свойствата антирефлексивност и симетричност.

Решение: За да намерим броя на релациите с исканите свойства ще разгледаме тяхното представяне с матрици. Матрицата, представяща антирефлексивна релация, има само нули по главния диагонал, а за матрицата на симетрична релация е характерно, че симетричните относно главния диагонал елементи са равни. Следователно, задачата се свежда до намиране броя на матриците с 5 реда и 5 стълба, които имат нули по главния диагонал и равни елементи, симетрични относно същия диагонал. Такава матрица се определя еднозначно от елементите си само над главния диагонал, а те са $\frac{5^2-5}{2} = 10$. И тъй като всеки елемент може да приема две стойности, то броят на търсените матрици е 2^{10}.

Задача 5: Функцията $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е дефинирана по следния начин: $f(x) = (2x, x^2 + 1)$. Проверете дали функцията е инекция, сюрекция, биекция.

Решение: Функцията е биекция, ако е инекция и сюрекция.

1. Ще проверим дали функцията е инекция, т.е. дали за всеки два елемента $x_1, x_2 \in \mathbb{N} : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Нека $x_1, x_2 \in \mathbb{N}, f(x_1) = f(x_2)$.

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (2x_1, x_1^2 + 1) = (2x_2, x_2^2 + 1) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Следователно, функцията е инекция.

2. Ще проверим дали функцията е сюрекция, т.е. дали $\forall y \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \ \exists x \in \mathbb{N}$, такова че $f(x) = y$.

   Нека $y = (1, 0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Тъй като $\forall x \in \mathbb{N} : x^2 + 1 > 0 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{N} : f(x) = (2x, x^2 + 1) = y$.

   Следователно, функцията не е сюрекция.

Изследваната функция е инекция, но не е сюрекция, следователно не е биекция.

Задача 6: Да се намери броят на думите с дължина 52, съставени от малките латински букви, такива че:

а) Във всяка дума от ляво надясно: във всяка позиция с четен номер има гласна буква - a, e, i, o, u, а във всяка позиция с нечетен номер – съгласна буква;

Решение: Всяко дума с дължина 52 е наредена комбинаторна конфигурация с повторение. В 26 позиции с четен номер 5 гласни букви може да се разположат по 5^{26} начина. За всеки избор на букви за четните позиции в останалите 26 позиции с нечетни номера 21 съгласни букви може да се разположат по 21^{26} начина.
Следоветлно, броят на думите, които отговарят на условето, е $5^{26} \times 21^{26}$.

б) Във всяка дума буквите, от ляво надясно, са в азбучен ред.

Решение: На всяка такава дума:

$$\underbrace{a...a}_{a_1}\underbrace{b...b}_{a_2}\underbrace{c...c}_{a_3}\dots\underbrace{y...y}_{a_{25}}\underbrace{z...z}_{a_{26}}$$

където $\sum_{i=1}^{26} a_i = 52$ и $0 \le a_i \le 52, 1 \le i \le 26$, еднозначно съответства двоичен вектор с дължина 78 от вида:

$$\underbrace{1...1}_{a_1}0\underbrace{1...1}_{a_2}0\underbrace{1...1}_{a_3}0...\underbrace{1...1}_{a_{25}}0\underbrace{1...1}_{a_{26}}0$$

Следователно, броят на думите, които отговарят на условието, е равен на броя на двоичните вектори с дължина 78, всеки от които има 26 нули, като последната координата е нула, а именно $\binom{52+(26-1)}{52} = \binom{52+(26-1)}{26-1} = \binom{77}{25} = \frac{77!}{25! \times 52!}$.