Примерни решения на семестриалното контролно по Дискретни Структури, КН 2 поток, 05.12.2021 г.

Зад. 1 Използвайки еквивалентни преобразувания, докажете следните еквивалентности в съждителната логика.

5 т. 1. $(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to (q \wedge r)$.

5 т. 2. $(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \vee q) \to r$.

5 т. 3. $(p \to q) \vee (p \to r) \equiv p \to (q \vee r)$.

5 т. 4. $(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$.

Решение:

1.

$$\begin{aligned}
(p \to q) \wedge (p \to r) &\equiv && // \text{ закон за импликацията} \\
(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) &\equiv && // \text{ дистрибутивност на диз. над кон.} \\
\neg p \vee (q \wedge r) &\equiv && // \text{ закон за импликацията} \\
p \to (q \wedge r)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
(p \to r) \wedge (q \to r) &\equiv && // \text{ закон за импликацията} \\
(\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) &\equiv && // \text{ дистрибутивност на диз. над кон.} \\
(\neg p \wedge \neg q) \vee r &\equiv && // \text{ закон на De Morgan} \\
\neg(p \vee q) \vee r &\equiv && // \text{ закон за импликацията} \\
(p \vee q) \to r
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
(p \to q) \vee (p \to r) &\equiv && // \text{ закон за импликацията} \\
(\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee r) &\equiv && // \text{ комутативност и асоциативност на диз.} \\
\neg p \vee \neg p \vee q \vee r &\equiv && // \text{ идемпотентност на диз.} \\
\neg p \vee q \vee r &\equiv && // \text{ закон за импликацията} \\
p \to (q \vee r)
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
(p \to r) \vee (q \to r) &\equiv && // \text{ закон за импликацията} \\
(\neg p \vee r) \vee (\neg q \vee r) &\equiv && // \text{ комутативност и асоциативност на диз.} \\
\neg p \vee \neg q \vee r \vee r &\equiv && // \text{ идемпотентност на диз.} \\
\neg p \vee \neg q \vee r &\equiv && // \text{ закон на De Morgan} \\
\neg(p \wedge q) \vee r &\equiv && // \text{ закон за импликацията} \\
(p \wedge q) \to r
\end{aligned}$$

Зад. 2 Дефинираме “композиция на функции” по следния начин. Нека X, Y и Z са произволни множества. Нека $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$. Функцията $g \circ f : X \to Z$, дефинирана така:

$$\forall x \in X : (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

наричаме *композицията на* g *и* f. Внимание: в израза $\boxed{g \circ f : X \to Z}$, $\boxed{g \circ f}$ е името на функцията-композиция.

Дадено е множество A и функция $h : A \to A$, която е сюрекция. Докажете, че за всяка функция $f : A \to A$ и всяка функция $g : A \to A$ е вярно, че ако $f \circ h = g \circ h$, то $f = g$.

Решение: Разглеждаме произволни функции $f : A \to A$ и $g : A \to A$. Допускаме, че за всеки елемент $x \in A$ е вярно, че $f \circ h(x) = g \circ h(x)$, тоест, че $f(h(x)) = g(h(x))$, където h е сюрекция. Ще докажем, че за произволен елемент $a \in A$ е вярно, че $f(a) = g(a)$.

Щом h е сюрекция, съществува $b \in A$, такъв че $h(b) = a$. Щом за всеки елемент $x \in A$ е вярно, че $f(h(x)) = g(h(x))$, в частност за b е вярно, че $f(h(b)) = g(h(b))$. Но $h(b) = a$, така че $f(a) = g(a)$, което и трябваше да покажем.

Зад. 3 Докажете, че от всеки четири естествени числа можем да изберем две числа, такива че разликата им се дели на 3.

Решение: Добре известно е, че остатъците при деление на 3 са 0, 1 и 2. Но това са само три възможни остатъка, а дадените числа са четири. Тогава, съгласно принципа на Dirichlet, поне две от тях, да ги наречем a и b, имат един и същи остатък r при деление на 3, където $r \in \{0, 1, 2\}$.

Щом a и b имат един и същи остатък r при деление на 3, имаме право да ги запишем като $a = 3k + r$ и $b = 3\ell + r$, където k и ℓ са някакви естествени числа. Но тогава $a - b = 3k + r - (3\ell + r) = 3k + r - 3\ell - r = 3k - 3\ell = 3(k - \ell)$. Очевидно $3(k - \ell)$ се дели на 3, което и трябваше да покажем.

Зад. 4 Какъв е коефициентът пред $x^{100}y^{200}z^{300}w^{400}$ в $(x + y + z + w)^{1000}$?

Решение: Съгласно изучаваното на лекции, това е мултиномният коефициент

$$\frac{1000!}{100!\,200!\,300!\,400!}$$

Това е достатъчно прецизен отговор за целите на контролното. Числено, това е

$$\begin{aligned}
&2789553569688506880030579073303120282697168772515581973003\\
&4473176719539138461670593606267761166196211313077563933389\\
&6262910100829701980404963243674083044425575703958938826933\\
&4490097435409584671334057641072954542225252253440236197087\\
&0232694311009529842397167270289565507633940189485867495414\\
&1909680992772682552036991519556342078467633203266874040142\\
&7401648890849187026613578779892383758111931416039028750943\\
&2958594782425233263666186239174044248574428586461255933857\\
&9692473155793871161751918162353815047891464463681508943732\\
&692680357344625429924378288000 \approx 10^{552}
\end{aligned}$$

Зад. 5 Разгледайте рекурентното уравнение

$$a_n = \begin{cases} 3, & \text{ако } n = 0 \\ na_{n-1} - (n-1), & \text{ако } n > 0 \end{cases}$$

1 т. 1. Обяснете защо това уравнение не може да се реши чрез изучавания на лекции метод с характеристичното уравнение.

1 т. 2. Напишете стойностите на $n!$ за $n = 0, 1, \ldots, 8$.

1 т. 3. Напишете стойностите на a_n за $n = 0, 1, \ldots, 8$.

3 т. 4. Открийте закономерност при стойностите на a_n. С други думи, отгатнете решение на рекурентното уравнение.

14 т. 5. Докажете по индукция, че отгатнатото от Вас решение на рекурентното уравнение наистина е решение.

Решение: Уравнението за a_n не може да се реши с метода, изучаван на лекции, понеже не е с константни коефициенти. Коефициентът n вдясно не е константа.

Стойностите на факториела за аргумент $0, \ldots, 8$ са

$$
\begin{aligned}
&0! = 1\\
&1! = 1\\
&2! = 2\\
&3! = 6\\
&4! = 24\\
&5! = 120\\
&6! = 720\\
&7! = 5040\\
&8! = 40320
\end{aligned}
$$

Стойностите на a_n за аргумент $0, \ldots, 8$ са

$$
\begin{aligned}
&a_0 = 3\\
&a_1 = 3\\
&a_2 = 5\\
&a_3 = 13\\
&a_4 = 49\\
&a_5 = 241\\
&a_6 = 1441\\
&a_7 = 10081\\
&a_8 = 80641
\end{aligned}
$$

Веднага се вижда, че

$$a_n = 2(n!) + 1 \tag{1}$$

е в сила за $n \in \{0, 1, \ldots, 8\}$. Това е закономерността, която откриваме. Сега ще докажем по индукция, че тя е сила за всяко естествено n.

База: $n = 0$. (1) става $a_0 = 2(0!) + 1$, тоест, $a_0 = 3$. Но това наистина е така по условие. ✓

Индуктивно предположение: Допускаме, че за някое $n \in \mathbb{N}^+$ е вярно, че $a_n = 2(n!) + 1$. Ще докажем, че $a_{n+1} = 2((n+1)!)+1$. От рекурентното уравнение знаем, че $a_{n+1} = (n+1)a_n - n$. Съгласно индуктивното предположение, заместваме a_n с $2(n!) + 1$ и получаваме $a_{n+1} = (n + 1)(2(n!) + 1) - n$. Но дясната страна е

$$
\begin{aligned}
&(n + 1)(2(n!) + 1) - n =\\
&2(n + 1)(n!) + n + 1 - n =\\
&2(n + 1)! + 1
\end{aligned}
$$

Доказахме, че (1) е в сила за всяко естествено n.

Зад. 6 На лекция по Дискретни структури в зала 325, на първия ред седят десет студенти, да кажем А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И и Й, в този ред от прозореца към вратата. На следващата лекция по Дискретни, същите студенти сядат отново на първия ред. По колко начина може да се сторят това, така че никой/никоя да не седи на мястото, на което той или тя е седял(а) по време на предната лекция?

Не се иска числен отговор.

Решение: Това е директно приложение на формулата за броя на деранжиментите, изведена на лекции:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)!$$

за $n = 10$. Тоест, $\sum_{k=0}^{10} (-1)^k \binom{10}{k} (10-k)!$. Численият отговор, който не се иска, е $1\,334\,961$.