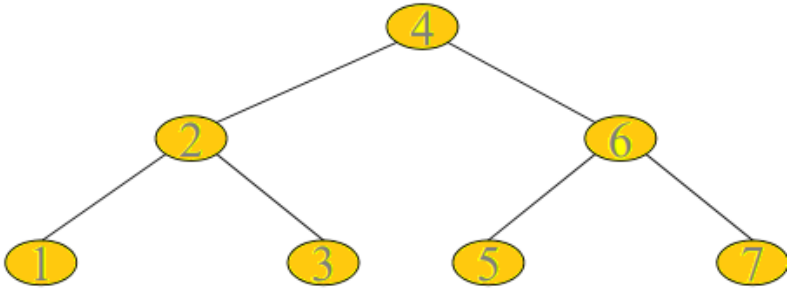
Балансирано и идеално балансирано дърво

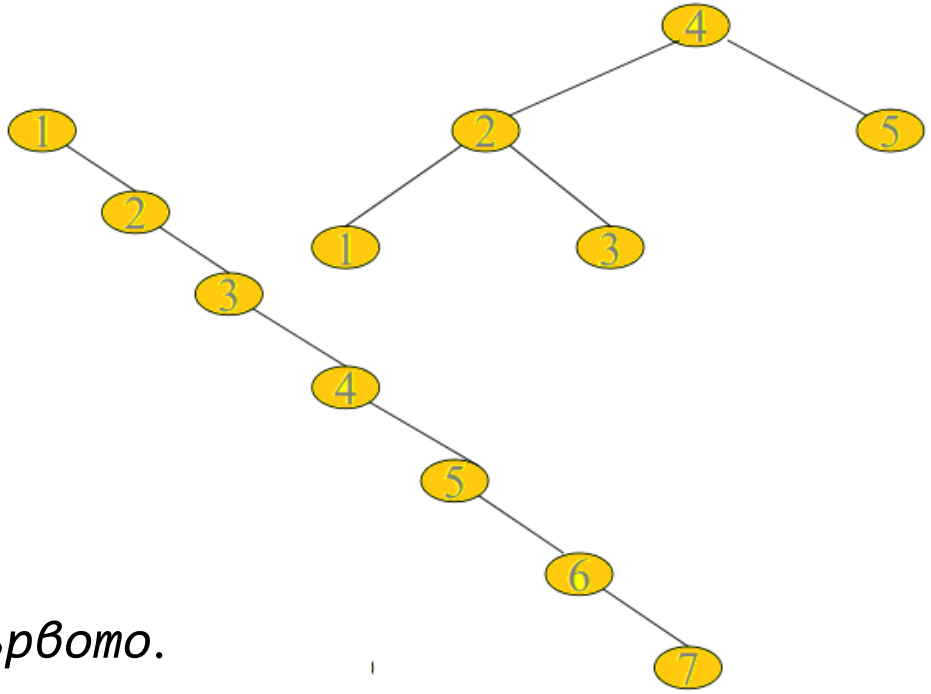
доц. д-р Нора Ангелова

Двоично наредено дърво

Двоични наредени дървета

- Средна сложност на операциите добавяне и търсене - `O(log N)`.
- Добавяне на елементите подредени по големина - `O(N)`.





** N – брой на върховете в дървото.*

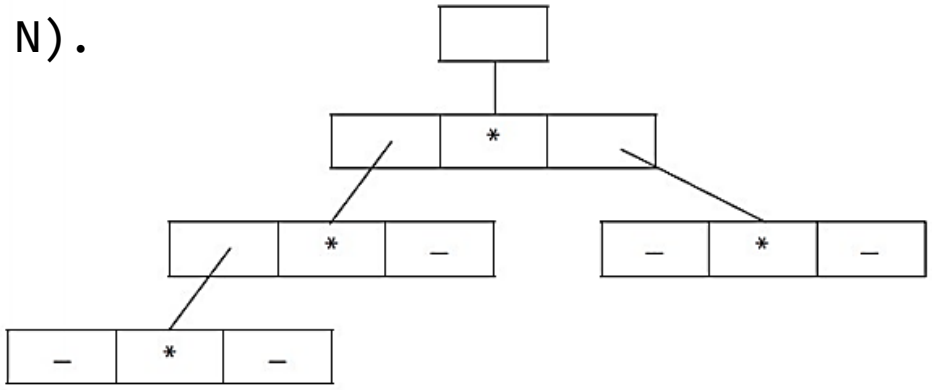
Идеално балансирано дърво

Дефиниция
Двоично наредено дърво се нарича идеално (перфектно) балансирано, ако всеки негов връх има ляво и дясно поддърво, в които **броят на възлите** се различава най-много с 1.

Двоично наредено дърво със следните свойства:

- Броят на възлите в лявото и дясното поддърво се различава най-много с 1.
- Лявото и дясното поддървета са идеално балансирани двоично наредени дървета.

`Сложност на операциите - O(log N).`



`* N – брой на върховете в дървото.`

Балансирано дърво (AVL)

Дефиниция
Двоично наредено дърво се нарича двоично дърво с балансирана височина или само балансирано дърво, ако за всеки негов връх **височините** (дълбочините) на лявото и дясното му поддървета се различават най-много с 1.

Двоично наредено дърво със следните свойства:

- Височините на лявото и дясното поддърво се различават най-много с 1.
- Лявото и дясното поддърветa са балансирани двоично наредени дървета.

`Сложност на операциите - O(log N).`

*`* N – брой на върховете в дървото.`

Балансирано и идеално балансирано дърво

Свойства:

- Всяко идеално балансирано дърво е балансирано дърво, но обратното не е вярно.
- Алгоритмите за добавяне и премахване на връх от двоично наредено дърво не запазват балансираността и добрите сложности.
- Съществуват алгоритми, които запазват балансираността.
- Съществува прост алгоритъм за създаване на идеално балансирано двоично наредено дърво при определени ограничения.

Балансирано и идеално балансирано дърво

Алгоритъм за създаване на идеално балансирано дърво

- Елементите, които ще се включват към празното двоично наредено дърво се подават в нарастващ ред.

- Предварително е известен броят на върховете на дървото.

```
n - брой на върховете в дървото.
n = nLeft + nRight + 1 && |nLeft - nRight| <= 1
```

Балансирано и идеално балансирано дърво

Алгоритъм за създаване на идеално балансирано дърво

```
n - брой на върховете в дървото.
n = nLeft + nRight + 1 && |nLeft - nRight| <= 1
```

- Конструира ляво поддърво с `nLeft` върха.
- Създава корен на дървото.
- Конструира дясно поддърво с `nRight` върха.

Балансирано дърво

Физическо представяне

Четворна кутия – добавя се още един параметър, означаващ коефициент на балансираност, задаващ разликата на височините на дясното и лявото поддърво на съответния връх.

Балансирано дърво

- **Ротации** - операции, които пренареждат част от елементите на дървото при добавяне или при премахване на елемент от него, за да се избегне дисбалансът му.

- Ротациите зависят от реализацията на конкретната структура от данни. Примери за такива структури:
  - **червено-черно** дърво
  - **AVL** - дърво
  - **AA** - дърво и др.

Балансирано и идеално балансирано дърво

AVL дърво
https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/AVLtree.html

- **Търсене** – осъществява се по същия начин както при обикновено небалансирано двоично наредено дърво.

Най-лош сценарий:
Трябва да се обходи от корена до най-далечното листо.
Време: пропорционално на височината на дървото – `O(log n).`

Балансирано дърво

AVL дърво

- **Обхождане** – осъществява се по същия начин както при обикновено небалансирано двоично наредено дърво.

Обхождат се всички върхове – `O(n)`.

Балансирано дърво

AVL дърво

Добавяне на връх

Операцията включване на елемент в балансирано двоично наредено дърво се осъществява по аналогичен начин на включването на елемент в двоично наредено дърво. Разликата е, че при всяко включване, което променя балансираността на дървото трябва да се изпълнят едно или две завъртания с цел възстановяване на балансираността.

Балансирано дърво

AVL дърво

Добавяне на връх:

- Върхът се добавя като листо.

- Повторно обхождане **(retracing)** - проверка за съответветствие с инвариантите на AVL дърво. Започва се от родителя на добавения връх и се стига до корена.

Реализира се чрез пресмятане на баланс фактор за всеки връх, който се дефинира като разликата във височините на лявото и дясното поддървета.

`balanceFactor – цяло число в интервала [-1 1].`

Балансирано дърво

AVL дърво

Добавяне на връх:

- Връх с `balanceFactor ∈ [-1 1]` - поддървото е балансирано и не е необходима ротация.

- Връх с `balanceFactor ∈ [-2 2]` – поддървото е небалансирано и е необходима ротация.

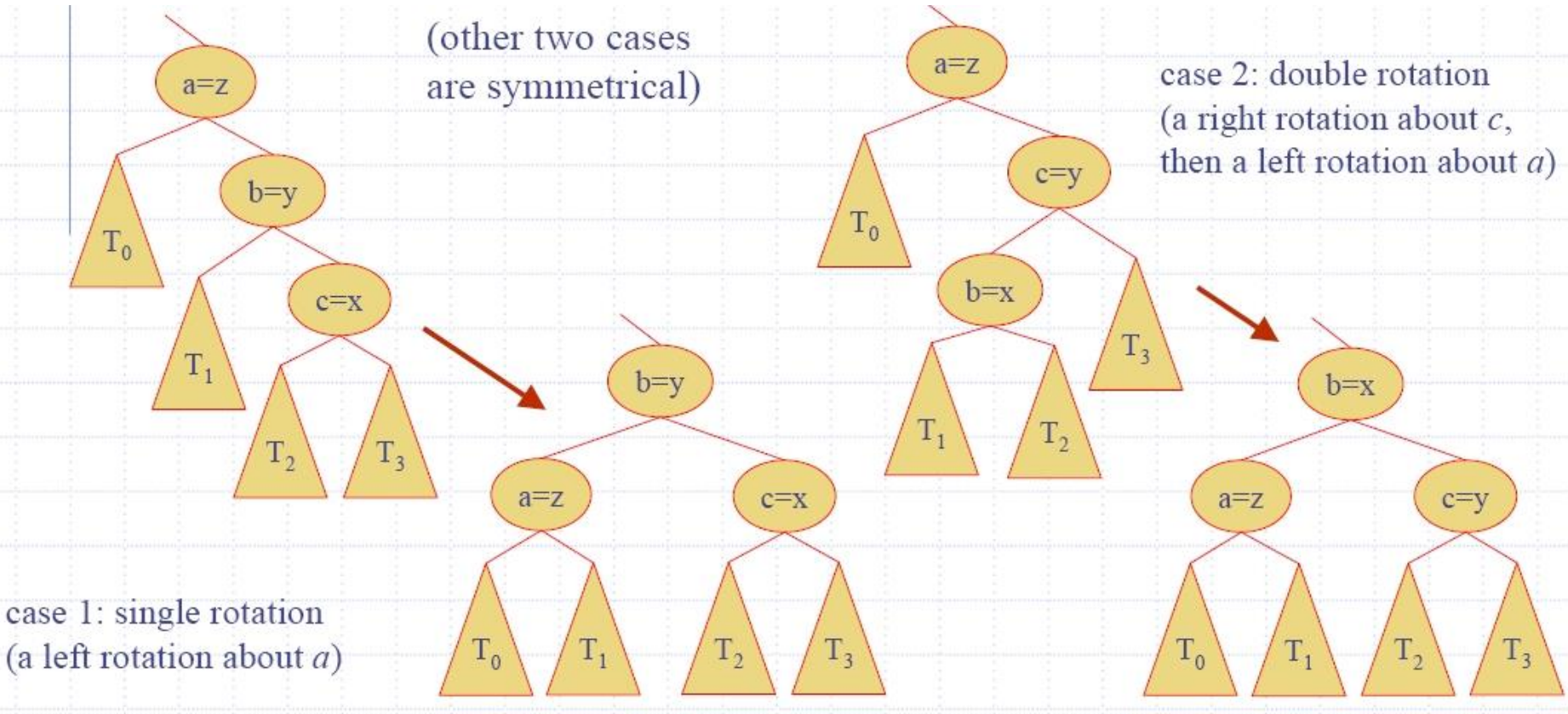
Балансирано дърво

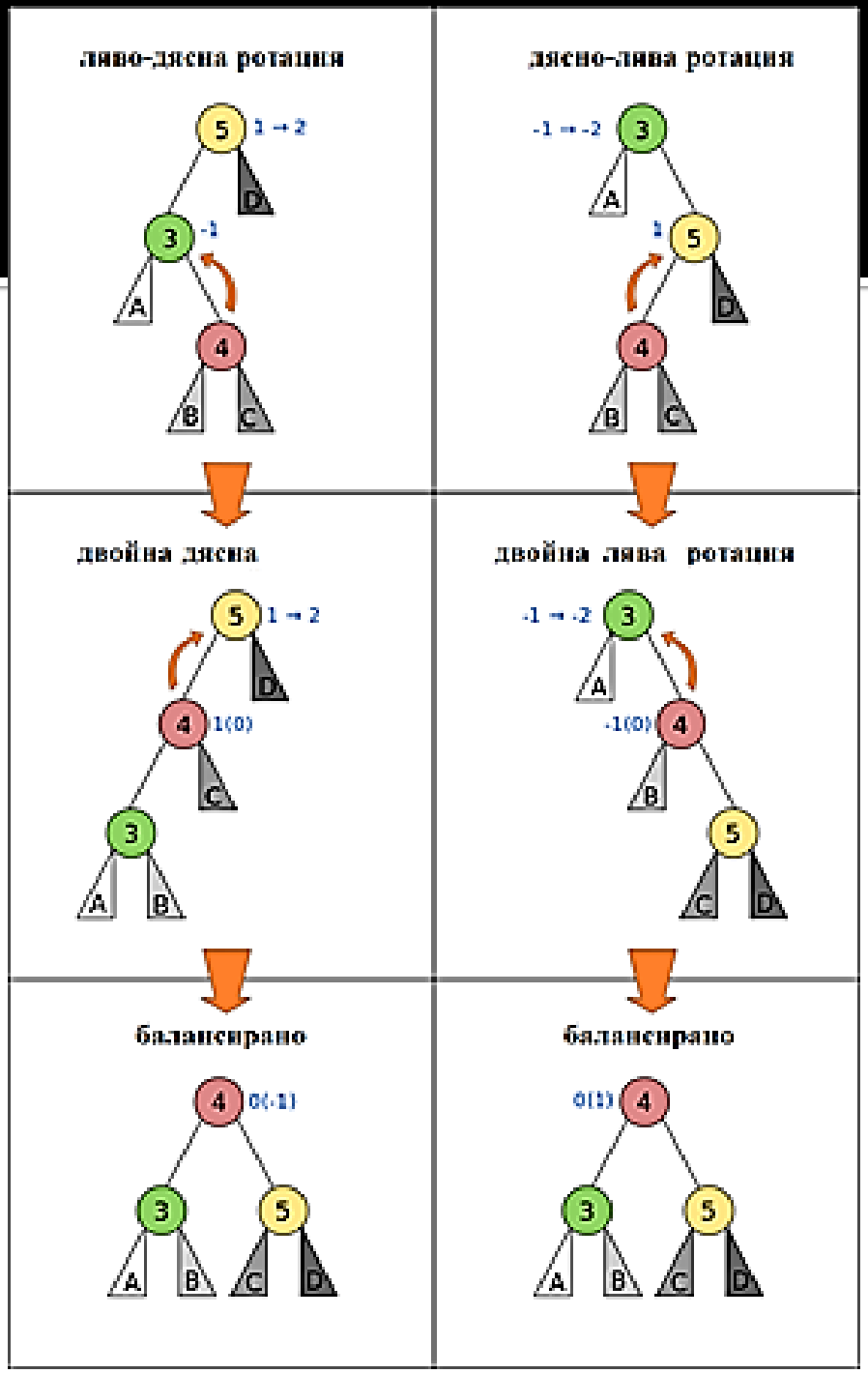
AVL дърво

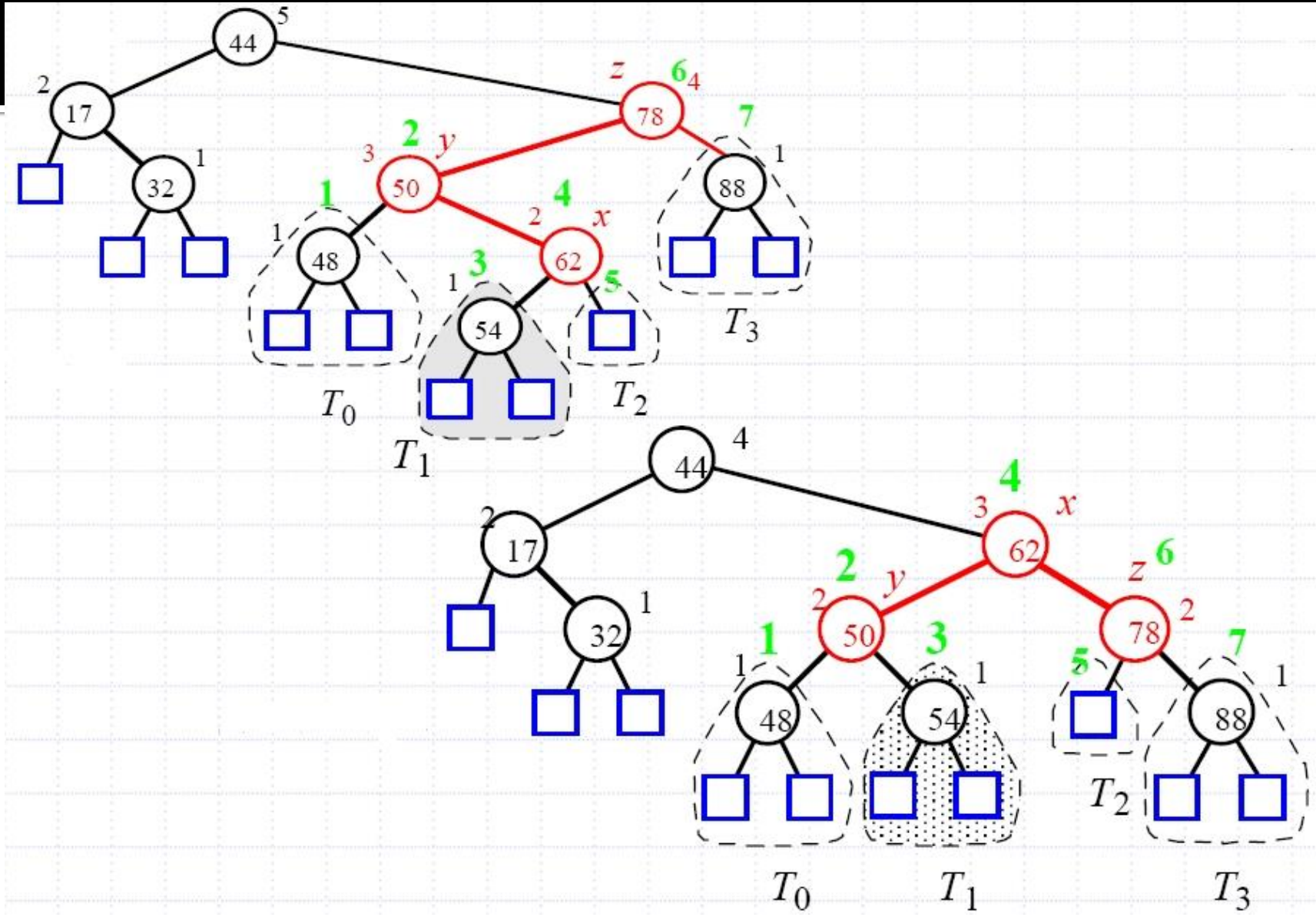
Ротационни функции:

- Дясна ротация.
- Лява ротация.
- Двойна ляво-дясна ротация (състои се от лява ротация, последвана от дясна).
- Двойна дясно-лява ротация (състои се от дясна ротация, последвана от лява).

Балансирано дърво




ляво-дясна ротация
5
1 → 2
D
3
-1
A
4
B
C
дясно-лява ротация
-1 → -2
3
A
1
5
D
4
B
C
двойна дясна
5
1 → 2
D
4
1(0)
C
3
A
B
двойна лява ротация
-1 → -2
3
A
-1(0)
4
B
5
C
D
балансирано
4
0(-1)
3
5
A
B
C
D
балансирано
0(1)
4
3
5
A
B
C
D


44
17
32
78
50
88
48
62
54
T_0
T_1
T_2
T_3
z
y
x
44
17
32
62
50
78
48
54
88
T_0
T_1
T_2
T_3

Балансирано дърво

AVL дърво

Изтриване на връх:

- Изтриване на връх от дървото.

- Повторно обхождане **`(retracing)`** - проверка за съответветствие с инвариантите на AVL дърво. Започва се от родителя на изтрития връх и се стига до корена.

Следва продължение…