Първо домашно по Дискретни структури, 05.11.2021 г.

Име: Даниел Петров Трополинов, ФН: 2MI0800096, Спец./курс: Компютърни науки, I курс

Задача	1	2	3	4	5	Общо
получени точки						
максимум точки	1	1	1	1	1	5

Задача 1. Релацията $R \subseteq A \times A$ е антирефлексивна.

Предложете метод, който да я разшири до строга частична наредба $R' \subseteq A \times A, R \subseteq R'$.

Освен това, предложеният метод да открива дали разширяването е възможно.

Задача 2. Двама приятели играят следната игра: на маса има 2 купчинки от камъчета.

Редувайки се, на всеки ход играчите си избират една от двете купчинки и взимат от нея произволен брой камъчета (колкото те си преценят).

Който вземе последното камъче, печели играта.

В кои начални конфигурации играчът, който прави първи ход, може да спечели при всяка стратегия на противника?

Упътване: Ползвайте индукция.

Задача 3. Нека сме избрали $n+1$ елемента на множеството $S = \{1, 2, 3, ..., 2n\}$. Покажете, че поне едно от избраните числа дели друго от избраните числа.

Задача 4. Колко са монотонно растящите редиците от естествени числа $x_1, x_2, \dots, x_n$, такива че $x_1 \geq 0, x_n \leq m$.

Задача 5. Означаваме множеството от реални числа с $\mathbb{R}$, а рационалните числа с $\mathbb{Q}$.

Определяме релацията $R = \{(x, y) |\ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x - y \in \mathbb{Q}\}$.

(a) Докажете, че R е релация на еквивалентност.

(b) Докажете, че класове на еквивалентност, породени от R, образуват неизброимо множество.

Срок за предаване: Предайте домашното на асистента на вашата група до 30 ноември 2021 г.!

Правила за предаване: Пратете мейл на асистента на вашата група с файлове, в някоя от следните форми:

(1) Заснети или сканирани листи, на които сте написали решенията ръкописно. Ако снимате с телефон, опитайте да използвате приложение с функционалности като CamScanner.

(2) Файлове във формат *.tex и *.pdf, изготвени по стандарта LaTeX. На следващата страница има кратки инструкции за LaTeX.

Решения

Задача 1.

Релация на строга частична наредба наричаме релация, която е антирефлексивна и транзитивна (от това, че релация на строга частична наредба е антирефлексивна и транзитивна, следва, че тя е и антисиметрична).

Нека дефинираме релацията R^i по следния начин:

$$R^i = \begin{cases} R, & \text{ако } i = 1, \\ R^{i-1} \circ R, & \text{ако } i \geq 2. \end{cases}.$$

Дадено ни е, че R е антирефлексивна. За да може R' да е транзитивна трябва $R^+ \subseteq R'$, където R^+ е транзитивното затваряне на R, дефинирано по следния начин: $R^+ = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} R^i$. Всъщност ни е достатъчно $R' = R^+$, защото ако R^+ не е строга частична наредба (знаем, че е транзитивна, остава възможността да не е антирефлексивна), то и всяко нейно разширение няма да е такава.

Знаем, че R^+ е транзитивна. Ако тя е антирефлексивна, тя е търсената строга частична наредба R'. Ще докажем, че когато в R няма контур, R^+ е антирефлексивна. Нека да допуснем противното - в R няма контур и R^+ не е антирефлексивна, т.е. $\exists x \in A$, такова, че $(x, x) \in R^+$. Но тъй като по условие R е антирефлексивна, то $(x, x) \notin R$, следователно двойката (x, x) е влязла в релацията R^+ в следствие на някое транзитивно разширяване с R^i, за $i \geq 2$. Тоест съществуват $a_1, a_2, ..., a_i \in A$, такива че $(a_1, a_2) \in R, (a_2, a_3) \in R, ..., (a_{i-1}, a_i) \in R, (a_i, a_1) \in R$. Но това означава, че $a_1, a_2, ...a_i \in A$ образуват контур в R, което е в противоречие с допускането, следователно R^+ е антирефлексивна, когато в R няма контур.

Също може да се докаже, че когато в R има контур R^+ не е антирефлексивна: Щом в R има контур, то съществуват $a_1, a_2, ..., a_i \in A$, такива че $(a_1, a_2) \in R, (a_2, a_3) \in R, ..., (a_{i-1}, a_i) \in R, (a_i, a_1) \in R$.

$$\text{От транзитивността на } R^+ \text{ следва, че щом } (a_1, a_2) \in R \text{ и } (a_2, a_3) \in R, \text{ то и } (a_1, a_3) \in R.$$
$$\text{От транзитивността на } R^+ \text{ следва, че щом } (a_1, a_3) \in R \text{ и } (a_3, a_4) \in R, \text{ то и } (a_1, a_4) \in R.$$
$$\cdots$$
$$\text{От транзитивността на } R^+ \text{ следва, че щом } (a_1, a_i) \in R \text{ и } (a_i, a_1) \in R, \text{ то и } (a_1, a_1) \in R.$$

Получихме, че $(a_1, a_1) \in R$, следователно R^+ не е антирефлексивна, когато в R има контур.

Антирефлексивната релация R може да се разшири до строга частична наредба

$$R' = R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$

само когато в R няма контур.

Задача 2.

Нека първо да докажем, че конфигурациите с 2 купчинки от n камъчета са губещи за играча, който е на ход, при оптимална стратегия на противника. Ще използваме силна индукция по n:

1) База: $n = 1$

Имаме 2 купчинки с по 1 камъче в тях. Играчът, който е на ход, няма друг избор, освен да вземе единственото камъче от едната от купчинките. За другия играч остава една купчинка с едно камъче, което той взема и печели играта.

2) Индукционна хипотеза:

Да допуснем, че всички конфигурации с 2 купчинки от i камъчета, където $i \in \{1, 2, ..., n\}$, са губещи за играча, който е на ход, при оптимална стратегия на противника.

3) Индукционна стъпка:

Ще докажем, че конфигурацията с 2 купчинки от $n+1$ камъчета е губеща за играча, който е на ход, при оптимална стратегия на противника. Първият играч има 2 възможности за хода си:

1) Да вземе $n+1$ камъчета от една от двете купчинки. В този случай вторият играч взема всички $n+1$ камъчета от другата купчинка и печели играта.

2) Да вземе k камъчета, където $k \in \{1, 2, ..., n\}$ от една от двете купчинки. Да допуснем, без ограничение на общността, че играчът взема камъчетата от втората купчинка. В този случай получаваме 2 купчинки със съответно $n+1$ и $n+1-k$ камъчета. Вторият играч може да вземе k камъчета от първата купчинка. Получаваме 2 купчинки от $n+1-k$ камъчета и тъй като $n+1-k < n+1$ ще попаднем в конфигурация, за която от индукционната хипотеза знаем, че е губеща за първия играч.

Получихме, че конфигурация с 2 купчинки с равен брой камъчета е губеща за играча, който играе пръв. Сега ще докажем, че всички останали конфигурации са печеливши за първия играч.

Нека имаме 2 купчинки със съответно a и b камъчета. Да допуснем, без ограничение на общността, че $a > b$. Първият играч може да вземе $a - b$ камъчета от първата купчинка. В първата купчинка остават $a - (a - b) = b$ камъчета и попадаме в конфигурация, която доказахме, че е губеща за играча, който е на ход (втория играч в случая) каквато и да е неговата стратегия.

Отговор : При всяка конфигурация, при която броят на камъчетата в двете купчинки е различен, играчът, който прави първи ход, може да спечели при всяка стратегия на противника.

Задача 3.

Ще използваме индукция по n:

1) База: $n = 1$

Трябва да изберем 2 числа от $S = \{1, 2\}$. Това може да стане само по един начин - вземаме $\{1, 2\}$. Ясно е, че 1 дели 2, следователно твърдението е вярно за $n = 1$.

2) Индукционна хипотеза:

Да допуснем, че твърдението е вярно за някое n - във всяка $(n+1)$-орка числа от $S = \{1, 2, 3, ..., 2n\}$ се съдържат поне две числа, такива че едното дели другото.

3) Индукционна стъпка:

Ще докажем, че твърдението е вярно за $n+1$ - във всяка $(n+1)+1 = (n+2)$-орка числа от $S = \{1, 2, 3, ..., 2n+2\}$ се съдържат поне две числа, такива че едното дели другото.

От индукционната хипотеза знаем, че можем да изберем множество A с максимум n числа от $S = \{1, 2, ..., 2n\}$, такива че нито едно от числата в множеството да не дели друго от тях. Нека разгледаме възможните начини да допълним A до $n+2$ елемента:

1) Избираме 2 числа от $\{1, 2, ..., 2n\} \setminus A$ и ги слагаме в A. При такъв избор попадаме в случая от индукционната хипотеза, следователно в множеството A се съдържат две числа, едно от които дели другото.

2) Избираме 1 число от $\{1, 2, ..., 2n\} \setminus A$ и едно от $\{2n+1, 2n+2\}$ и ги слагаме в A. При такъв избор в A отново имаме $n+1$ числа от $\{1, 2, ...2n\}$ и отново попадаме в случая от индукционната хипотеза, следователно в множеството A се съдържат две числа, едно от които дели другото.

3) Избираме числата $2n+1$ и $2n+2$ и ги слагаме в A. В този случай имаме два подслучая:

3.1) Числото $n+1$ е в А. Знаем, че $(n+1)|(2n+2)$, следователно имаме две числа, едно от които дели другото.

3.2) Числото $n+1$ не е в A. Да предположим, че в A няма число p, което дели $n+1$ (Не разглеждаме числа, които се делят на $n+1$, защото най-малкото такова, различно от $n+1$, е $2n+2$). Тогава можем да добавим $n+1$ в A и да получим $n+1$ числа от $\{1, 2, ...2n\}$ измежду които няма две числа, едно от които дели другото. Стигнахме до противоречие с индукционната хипотеза, следователно в A $\exists p$, такова че $p|(n+1)$. От тразнитивността на делимостта, имаме, че щом $p|(n+1)$ и $(n+1)|(2n+2)$, то следва, че $p|(2n+2)$. Отново получихме две числа, едно от които дели другото.

Получихме, че по какъвто и начин да допълним множеството A до множество с $n+2$ числа винаги получаваме поне една двойка числа, такива че едното дели другото. Следователно твърдението е вярно и за $n+1$.

С индукция по n доказахме, че по какъвто и начин да изберем $n+1$ елемента от множеството $S = \{1, 2, 3, ..., 2n\}$ винаги поне едно от избраните числа ще дели друго от избраните числа.

Задача 4.

Нека първо да разгледаме по колко начина можем да поставим n неразличими звездички в $n+m$ кутийки, така че във всяка кутийка да има най-много една звездичка. Това е конфигурация без наредба и без повторение, следователно броят на различните разпределения е $C_n^{n+m} = \binom{n+m}{n}$. Нека U е множеството от всички монотонно растящи редици от естествени числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, такива че $x_1 \geq 0, x_n \leq m$, а V е множеството от всички наредби на n неразличими звездички в $n+m$ кутийки. За произволно $v \in V$ ще образуваме редица $u \in U$ по следния начин:

Нека за $i = \{1, 2, ..., n\}$ u_i е равно на броя на празните кутийки преди i-тата поред звездичка от ляво надясно в v.

Например за $n = 4$ и $m = 3$ редицата $\{0, 0, 2, 3\}$ ще се представи по следния начин:

*	*			*		*

Ще докажем, че чрез горното съответствие на всеки един елемент от едното множество се съпоставя точно един елемент от другото множество:

1) Нека изберем произволно $u \in U$. Строим съответстващия му $v \in V$ по следния начин: За $i = \{1, 2, ..., n\}$ поставяме звездичка в $(u_i + i)$-тата кутийка от v (знаем, че имаме u_i празни кутийки и $i-1$ кутийки със звездички преди i-тата звездичка.) Тъй като редицата $\{u_i\}$ е монотонно растяща редица, стойностите на i образуват строго монотонно растяща редица, следва, че редицата $\{u_i+i\}$ също е строго монотонно растяща редица. Следователно няма как да получим кутийка с повече от една звездичка. Знаем, че $u_i + i$ достига максимума си при $u_i = m$ и $i = n$. Следователно всяка звездичка ще влезе в кутия с номер $\leq m+n$. Следователно получената редица v наистина е от множеството V. Също така ако някой елемент u_i на u бъде променен, то тогава и редицата $\{u_i + i\}$ се променя, от където следва, че на всяка редица $u \in U$ съответства точно една подредба $v \in V$.

2) Нека изберем произволно $v \in V$. Строим съответстващия му $u \in U$ по следния начин: За $i = \{1, 2, ..., n\}$ u_i е равно на броя на празните кутийки преди i-тата поред звездичка от ляво надясно в v. Тъй като разглеждаме звездичките от ляво на дясно, то броя на празните кутийки преди i-тата звездичка е по-малък или равен на броя на празните кутийки преди $(i+1)$-вата звездичка. Следователно, за $i = \{1, 2, ..., n-1\}$ е изпълнено $u_i \leq u_{i+1}$, следователно редицата е монотонно растяща. Празните места пред n-тата звездичка могат да са максимум $(m+n-1)-(n-1) = m$

(брой кутийки преди $(m+n)$-тата, в $(n-1)$ от които има поставена звездичка), от което следва, че $u_n \leq m$, а съответно и всички други $u_i \leq m$, защото редицата е монотонно растяща. Следователно получената редица u наистина е от множеството U. Също така ако i-тата звездичка от v бъде преместена в друга празна кутийка, то u_i ще се промени, от където следва, че на всяка подредба $v \in V$ съответства точно една редица $u \in U$.

От 1) и 2) следва, че можем на всеки един елемент от едното множество да съпоставим точно един елемент от другото множество. Следователно $|U| = |V| = \binom{n+m}{n}$.

Отговор: Монотонно растящите редици от естествени числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, такива че $x_1 \geq 0, x_n \leq m$ са $\binom{n+m}{n}$ на брой.

Задача 5.

(а) Релация на еквивалентност наричаме релация, която е рефлексивна, симетрична и транзитивна. Ще докажем, че R притежава и трите свойства.

1) Рефлексивност - $(\forall x \in \mathbb{R})[xRx]$: Нека $x \in \mathbb{R}$ е произволно. Имаме, че $x - x = 0$, а $0 \in \mathbb{Q}$, следователно $(x, x) \in R$. Тъй като $x \in \mathbb{R}$ беше произволно, следва, че R е рефлексивна релация.

2) Симетричност - $(\forall x, y \in \mathbb{R})[xRy \to yRx]$: Нека $x, y \in \mathbb{R}$ са произволни и е изпълнено xRy.

$$xRy \Leftrightarrow x - y = p \in \mathbb{Q}$$
$$y - x = -p$$

Тъй като $p \in \mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}$ е поле, следва, че $(-p) \in \mathbb{Q}$, следователно $(y, x) \in R$. Тъй като $x, y \in \mathbb{R}$ бяха произволни, следва, че R е симетрична релация.

3) Транзитивност - $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})[xRy \wedge yRz \to xRz]$: Нека $x, y, z \in \mathbb{R}$ са произволни и е изпълнено $xRy \wedge yRz$.

$$xRy \Leftrightarrow x - y = p \in \mathbb{Q}$$
$$yRz \Leftrightarrow y - z = q \in \mathbb{Q}$$
$$\Downarrow$$
$$(x - y) + (y - z) = p + q$$
$$x - z = p + q$$

Тъй като $p, q \in \mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}$ е поле, следва, че $(p+q) \in \mathbb{Q} \Rightarrow xRz$. Тъй като $x, y, z \in \mathbb{R}$ бяха произволни, следва, че R е транзитивна релация.

От 1), 2) и 3) следва, че R е релация на еквивалентност.

(б) От дефиницията на релацията следва, че класът на еквивалентност $[x] = \{x + q : q \in \mathbb{Q}\}$ (изпълнено е, че $x - (x + q) = -q \in \mathbb{Q}$). Броят на елементите в класа на еквивалентност $[x]$ е колкото броят на рационалните числа, следователно $|[x]| = |\mathbb{Q}|$. Знаем, че $\mathbb{Q}$ е изброимо множество, съответно и $[x]$ е изброимо множество. Релацията разбива множеството $\mathbb{R}$ на непресичащи се класове на еквивалентност, следователно обединението на всички класове на еквивалентност, породени от R, е множеството на реалните числа $\mathbb{R}$.

Знаем, че обединението на изброимо много изброими множества също е изброимо множество. Нека допуснем, че множеството от класовете на еквивалентност, породени от R, е изброимо множество. Знаем, че всеки клас поотделно е изброимо множество, следователно обединението им също е изброимо множество. От друга страна обединението им е $\mathbb{R}$, за което сме доказвали, че е неизброимо. Получихме противоречие. Множеството от класовете на еквивалентност, породени от R, е неизброимо множество.