ПРИНЦИП НА КРАЙНИЯ ЕЛЕМЕНТ

В някои математически задачи имаме множество от равноправни обекти, чиито известни свойства са твърде малко за решаването на съответната задача. В такъв случай е полезно да насочим вниманието си към подходящо избран краен елемент — обект от задачата, който е екстремален в някакъв смисъл: най-малко число, най-лява точка, фигура с най-голямо лице или обем и т.н. Крайният елемент има едно допълнително свойство — това, че е екстремален. Ето защо е по-лесно да се разсъждава за крайния елемент, отколкото за другите обекти на задачата. След като с помощта на екстремалното свойство получим някакви изводи за крайния елемент, те се пренасят за останалите обекти въз основа на равноправието на обектите в другите им свойства.

Описаният подход се нарича принцип (правило) на крайния елемент. Това е метод, а не теорема.

Понякога принципът на крайния елемент се прилага по следния начин: от множество аналогични случаи (например различни наредби на елементите) разглеждаме само един без ограничение на общността на разсъжденията.

Приложения в алгебрата

Задача 1. По окръжност са написани няколко реални числа. Всяко от тях е средно аритметично на двата си съседа. Докажете, че всички числа са равни.

Решение: Нека a е най-малкото сред числата, написани по окръжността (ако има няколко най-малки числа, няма значение кое от тях ще изберем). Да означим съседите на a с b и c. Понеже избрахме a да е най-малкото число, важат неравенствата $a \le b$ и $a \le c$. Събираме ги: $2a \le b + c$. Делим на 2 и получаваме неравенството $a \le \dfrac{b+c}{2}$. По условие има равенство: $a = \dfrac{b+c}{2}$. Това е възможно само когато всяко от двете събрани неравенства се обръща в равенство, тоест $b = a = c$ (иначе сборът би се получил строго неравенство). Излиза, че съседите на най-малкото число са равни на него. Следователно те също са най-малки числа, затова и техните съседи са такива. Като обходим окръжността, разпространявайки получения извод, стигаме до заключението, че всички числа са равни (и най-малки).

Задача 2. Да се реши в естествени числа уравнението

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5}.$$

Решение: Уравнението е симетрично, затова имаме право да предположим без ограничение на общността на разсъжденията, че $x \le y \le z$. (Ако искаме да приложим принципа за крайния елемент буквално, бихме могли да кажем, че избираме x да е най-малкото, а z — най-голямото от трите числа.)

От неравенствата $x \le y \le z$ следва $\frac{1}{x} \ge \frac{1}{y} \ge \frac{1}{z}$. Ето защо $\frac{3}{x} \ge \frac{4}{5}$, откъдето правим извод, че $x \le \frac{3\,.\,5}{4} = 3{,}75$. Понеже x е естествено число, то x е равно на 1 или 2, или 3.

Ако $x = 1$, то $\frac{1}{1} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5}$, тоест $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = -\frac{1}{5}$, което е невъзможно, защото y и z са естествени (следователно положителни) числа.

Ако $x = 2$, то $\frac{1}{2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5}$, тоест $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{10}$, затова $\frac{2}{y} \ge \frac{3}{10}$, което значи, че $2 \le y \le \frac{10\,.\,2}{3} = 6\frac{2}{3}$. Иначе казано, y е 2 или 3, или 4, или 5, или 6. Числото z е съответно равно на -5 или -30, или 20, или 10, или 15/2. Понеже z е естествено число, то може да е само 20 или 10, а y е съответно 4 или 5. От този случай намираме две решения на уравнението: $x_1 = 2$, $y_1 = 4$, $z_1 = 20$; $x_2 = 2$, $y_2 = 5$, $z_2 = 10$.

Ако $x = 3$, то $\frac{1}{3} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5}$, тоест $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{15}$, затова $\frac{2}{y} \ge \frac{7}{15}$, което значи, че $3 \le y \le \frac{15\,.\,2}{7} = 4\frac{2}{7}$. С други думи, y е 3 или 4. Числото z е равно съответно на 15/2 или 60/13, но и двете стойности са дробни, поради което са недопустими за z. Затова от този случай не получаваме решения.

Окончателно, с точност до разместване на неизвестните уравнението има две решения: $x_1 = 2$, $y_1 = 4$, $z_1 = 20$; $x_2 = 2$, $y_2 = 5$, $z_2 = 10$. Чрез разместване всяко от тях поражда още пет решения. Следователно уравнението притежава общо дванайсет решения.

Задача 3. Да се реши в реални числа системата

$$\left|\begin{array}{l} x^5 + x = y + 32 \\ y^5 + y = z + 32 \\ z^5 + z = x + 32. \end{array}\right.$$

Решение: Системата е циклична, но не е симетрична. Затова можем без ограничение да предположим, че x е най-малкото от трите неизвестни, но нямаме право да предполагаме, че $x \le y \le z$, защото второто неравенство би ограничило общността на разсъжденията. Ако разбием задачата на случаи, то сме длъжни да разгледаме два случая: 1) $x \le y \le z$; 2) $x \le z \le y$.

По-добре е да избегнем разглеждането на случаи. Функцията $f(t) = t^5 + t$ е строго растяща и щом x е най-малкото от трите неизвестни, то $f(x) = y + 32$ е най-малката от функционалните стойности в десните страни на уравненията.

Следователно y е най-малкото от трите неизвестни, откъдето следва, че $x = y$. Аналогично се доказва, че и z е най-малко, тоест $x = y = z$. Първото уравнение на системата приема следния вид: $x^5 + x = x + 32 \Leftrightarrow x^5 = 32 \Leftrightarrow x = 2$. Окончателно, системата притежава само едно решение: $x = y = z = 2$.

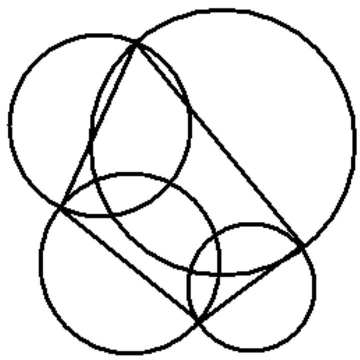
Условието на тази задача е взето от списание "Математика", бр.1 / 1989 г. Условията на останалите задачи, а също и някои от техните решения са взети от сборника "Принцип на крайния елемент", издаден през 1992 г., с автор доц. Пенка Рангелова от ФМИ на ПУ "Паисий Хилендарски".

Приложения в геометрията

Задача 1. Докажете, че ако дължините на всички страни на триъгълник са по-малки от 1, то лицето му е по-малко от $\sqrt{3}\,/\,4$.

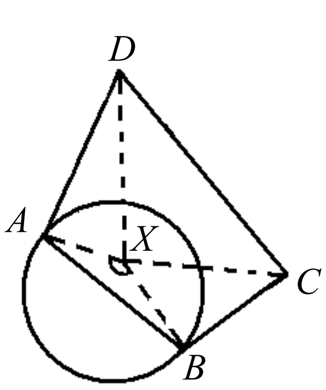
Решение: Нека α е най-малкият ъгъл на триъгълника. Сборът от ъглите на триъгълника е $180°$, следователно $\alpha \le 60°$, поради което $\sin\alpha \le \sqrt{3}\,/\,2$. Тогава лицето на триъгълника $S = \dfrac{bc\sin\alpha}{2} \le \dfrac{1\,.\,1\,.\,\sqrt{3}\,/\,2}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Задача 2. Даден е един изпъкнал четириъгълник. Разглеждаме четири затворени кръга, чиито диаметри са страните на четириъгълника ("затворени" означава, че всеки кръг съдържа ограждащата го окръжност). Докажете, че тези кръгове покриват вътрешността и контура на четириъгълника.



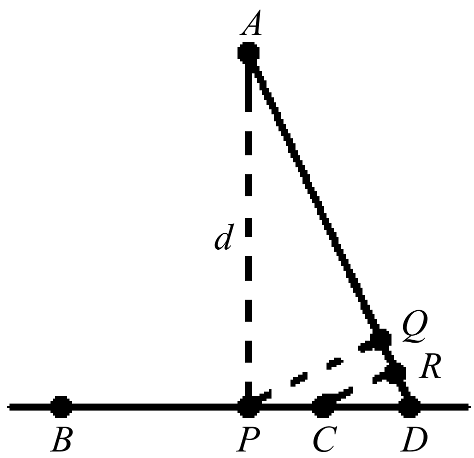
Решение: Че четирите кръга покриват контура на четириъгълника, е очевидно: всеки от кръговете покрива съответната страна, включително краищата ѝ, защото всеки кръг покрива всеки свой диаметър.

Сега нека X е точка от вътрешността на изпъкналия четириъгълник $ABCD$. Тогава $\sphericalangle AXB + \sphericalangle BXC + \sphericalangle CXD + \sphericalangle DXA = 360°$. Да изберем най-големия от тези ъгли. Без ограничение нека това е $\sphericalangle AXB$. Следователно лявата страна не надхвърля $4\sphericalangle AXB$, затова $4\sphericalangle AXB \ge 360°$, тоест $\sphericalangle AXB \ge 90°$. Ето защо точката X лежи във вътрешността или по контура на кръга с диаметър AB.



Задача 3. Да се докаже, че не съществува крайно множество от поне две точки в равнината, не всички лежащи на една права, със следното свойство: всяка права през две точки от множеството да съдържа трета негова точка.

Решение: Да допуснем противното. През всеки две точки от множеството прекарваме права. Разглеждаме разстоянията от всяка точка от множеството до всяка прекарана права. Разстоянията от този вид са краен положителен брой (понеже множеството съдържа поне две точки и е крайно) и не всички са нули (защото не всички точки от множеството лежат на една права). Да означим с d най-малкото положително разстояние и нека A, B и C са точки от множеството, за които разстоянието от т. A до правата BC е равно на d.



Нека P е петата на перпендикуляра, спуснат от точката A към правата BC. Тогава $AP = d > 0$. Правата BC минава през две точки от даденото множество, следователно тя съдържа трета точка от множеството, която да означим с D. Точката P разделя правата BC на два лъча. От принципа на Дирихле следва, че поне един от тях съдържа поне две от точките B, C и D. Без ограничение нека точките C и D лежат от една и съща страна на т. P, като C е между P и D (възможно е т. C да съвпада с т. P); следователно $0 \le PC < PD$ и $0 < CD \le PD$. От точките P и C да спуснем перпендикуляри PQ и CR към правата AD. Тъй като точката D не съвпада с P, то $\triangle APD$ е триъгълник, и то правоъгълен (правият ъгъл е при върха P). Хипотенузата на правоъгълния триъгълник $\triangle APD$ е най-дългата му страна, затова височината към нея е най-малката височина. По-конкретно, $AD > PD$, затова $PQ < d$. Освен това $\triangle CRD$ и $\triangle PQD$ са подобни, защото имат съответно равни ъгли (PQ и CR са перпендикуляри към AD). Щом $\triangle CRD \sim \triangle PQD$ и $0 < CD \le PD$, то $0 < CR \le PQ$. От $CR \le PQ$ и $PQ < d$ следва, че $CR < d$. Тоест разстоянието от т. C до правата AD е по-малко от d (и е положително, защото C не съвпада с D, а правите AD и BC са различни). Като вземем предвид, че точките A, C и D са от даденото множество от точки, става ясно, че последното неравенство противоречи на минималността на d.