

**Задача 1:** Можем да решим задачата с индукция, но едно по-кратко решение е да забележим, че след като разкрием скобите на произведението  $(1 + 1)(1 + 2)\dots(1 + n)$  получаваме точно събираемите в  $S(n)$  ■

**Задача 2:** Ключовото наблюдение, което трябва да направим е че ако  $n - 1$  от клетките на един ред или колона са попълнени, то има точно една възможност да се попълни празната клетка на съответния ред/колона, така че да не нарушим условието за хубост. Нека сме попълнили подтаблицата с размери  $(n - 1)$  на  $(n - 1)$ , започваща от горния ляв ъгъл по произволен начин. От наблюдението можем да заключим, че знаем стойностите на всички клетки, освен долния десен ъгъл на началната таблица. Освен това, първите  $(n - 1)$  реда и колони на таблицата не нарушават условието за хубост. Сега е момента да докажем лемата от упътването. Очевидно броят на единиците, които сме сложили на  $n$ -тия ред и броят на единиците, които сме сложили на  $n$ -тата колона съответстват на бройките редове и колони с нечетна сума от произволно попълнената подтаблица с размери  $(n - 1)$  на  $(n - 1)$ . Нека броят на единиците в малката таблица означим с  $x$ , броят редове с нечетна сума означим с  $r$  и броят на колони с нечетна сума с  $c$ . Очевидно,  $x \equiv r \pmod{2}$  и  $x \equiv c \pmod{2}$  понеже приноса от редовете/колониите с четна сума е сравним с 0 по модул 2. Следователно, можем да заключим че  $r \equiv c \pmod{2}$ . Е, от тук следва че стойността на клетката в долния десен ъгъл също се определя еднозначно, понеже тя трябва да подsigури четността на сумите на  $n$ -тия ред и  $n$ -тата колона, а тези суми са съответно  $r$  и  $c$ . Докажахме, че произволно попълване на подтаблицата започваща от горния ляв ъгъл с размери  $(n - 1)$  на  $(n - 1)$  може да се допълни до хубаво попълване по точно един начин. Следователно, броят на хубавите попълвания е  $2^{(n-1)^2}$

**Задача 3:** Нека да напишем условията едно подмножество да е антиклика и покриване в явен вид:

$X \subseteq V$  е антиклика  $\iff \forall (u, v) \in X^2, (u, v) \notin E$

$X \subseteq V$  е покриване  $\iff \forall (u, v) \in E, u \in X \vee v \in X$

Първо ще докажем че ако  $X \subseteq V$  е антиклика, то  $\bar{X} = V \setminus X$  е покриване. Да допуснем, че  $\bar{X}$  не е покриване. От дефиницията на покриване следва че съществува ребро  $(u, v) \in E$ , за което  $u \notin \bar{X}$  и  $v \notin \bar{X}$ . Тъй като  $\bar{X} = V \setminus X$  можем да заключим, че  $u \in X$  и  $v \in X$ , но  $(u, v) \in E$ , следователно  $X$  не е антиклика, което е противоречие, следователно допускането ни е грешно и  $\bar{X}$  е покриване.

Сега да докажем, че ако  $X \subseteq V$  е покриване, то  $\bar{X} = V \setminus X$  е антиклика. Да допуснем, че  $\bar{X}$  не е антиклика. От дефиницията на антиклика следва че съществува ребро  $(u, v) \in E$ , за което  $u \in \bar{X}$  и  $v \in \bar{X}$ . Тъй като  $\bar{X} = V \setminus X$  можем да заключим, че  $u \notin X$  и  $v \notin X$ , но тъй като  $(u, v) \in E$ , то това е в противоречие с факта, че  $X$  е покриване, следователно допускането ни е грешно и  $\bar{X}$  е антиклика.

**Задача 4:** Да допуснем че в графа има мост  $(u, v)$ . Изтриването му води до появата на две свързани компоненти, да ги наречем  $G_1$  и  $G_2$ , всяка от които е граф само по себе си. Едната от тези компоненти съдържа  $u$ , а другата –  $v$ . Да кажем, че  $u$  е в  $G_1$ , а  $v$  е в  $G_2$ . Но  $u$  е връх от нечетна степен в  $G_1$ , също както  $v$  е връх от нечетна степен в  $G_2$ . Нещо повече,  $u$  е единственият връх от нечетна степен в  $G_1$ , също както  $v$  е единственият връх от нечетна степен в  $G_2$ . Но този извод директно противоречи на факта, че във всеки граф, броят на върховете от нечетна степен е четно число.

Алтернативно доказателство е, че в свързан граф с върхове само от четна степен има Ойлеров цикъл. Граф, който има Ойлеров цикъл, очевидно няма мостове.