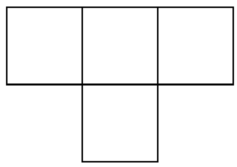
**КОНТРОЛНО № 2 ПО ИЗБИРАЕМИЯ УЧЕБЕН ПРЕДМЕТ
“ЛОГИЧЕСКИ И МАТЕМАТИЧЕСКИ МЕТОДИ”
(СУ “СВЕТИ КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ”, ФМИ, 19. 01. 2022 Г.)**

Задача 1. Върху главния диагонал на правоъгълник 10×10 са поставени десет пула, всеки в различна клетка. За един ход можем да преместим произволно избрани два пула с една клетка надолу. Възможно ли е да сложим всички пулове на най-долния ред?

Задача 2. На черната дъска са написани три реални числа. Всяка минута те се менят по следното правило: числата x, y и z се изтриват, а вместо тях се записват съответно числата $2x - 2y + z - 1$, $2y - 2z + x - 1$ и $2z - 2x + y - 1$. Докажете, че все някога на дъската ще се появи отрицателно число.

Задача 3. В равнината са начертани една декартова координатна система и многоъгълник, чиито върхове всички имат по две целочислени координати, а всяка негова страна е успоредна на някоя от координатните оси. (Допуска се многоъгълникът да не е изпъкнал.)

Докажете, че многоъгълникът може да се разреже на еднакви Т-образни фигури, всяка от които е съставена от четири еднакви квадрата (като показаната на чертежа). Не е задължително квадратите на Т-образните фигури да бъдат с размери 1×1, т.е. сами си избираме размера на Т-образните фигури.



Задача 4. Искаме да напишем в редица целите числа от 1 до 100 вкл. по такъв начин, че всяко от тези числа да се среща в редицата точно един път и от всеки две съседни числа едното да дели другото. Възможно ли е това?

Задача 5. Върховете на $\triangle ABC$ се срещат в реда A, B, C при обхождане на контура на $\triangle ABC$ по часовника. Върху страните на $\triangle ABC$ външно за него са построени квадрати и техните центрове A_1, B_1 и C_1 (буквата на всеки център е името на върха на $\triangle ABC$ срещу страната, върху която е построен квадратът). После чертежът е изтрит, запазени са само точките A_1, B_1 и C_1 и имената им. Възстановете $\triangle ABC$ (намерете точките A, B и C по дадените точки A_1, B_1 и C_1).

Задача 6. Докажете, че има четен брой начини да изберем n-членно жури измежду $2n$ съдии ($n > 0$).

Задача 7. Да се реши рекурентното уравнение $a_n = 17a_{n-1} - 72a_{n-2}$, $n \geq 2$, с начални условия $a_0 = 10$ и $a_1 = 3$.

Задача 8. Да се намери функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, за която $4f(10 - x) + 5f(x) = x$ за всяко реално число x.

СХЕМА НА ОЦЕНЯВАНЕ

Задача 5 носи 2 т., а останалите задачи — по 1 т. Оценката = точките. Зачитат се само верни и подробно обяснени решения.

РЕШЕНИЯ

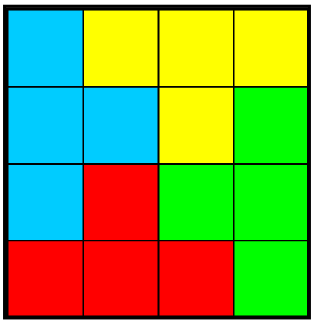
Задача 1. Това е невъзможно. За всеки пул разглеждаме височината му над най-долния ред. Всеки ход намалява с 2 сбора от височините на пуловете, следователно този сбор запазва своята четност (т.е. тя е инвариант). Отначало сборът е $0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 8 + 9 = 45$, което е нечетно. Затова той ще остане нечетно число и не може да стане $0 + 0 + 0 + \ldots + 0 = 0$, което е четно число.

Задачата е от XX Руска олимпиада по математика за средношколци, 1994 г.

Задача 2. Сборът на числата е полуинвариант: всяка минута намалява с 3: $(2x - 2y + z - 1) + (2y - 2z + x - 1) + (2z - 2x + y - 1) = (x + y + z) - 3$. Ето защо сборът на числата все някога ще стане отрицателен. Затова поне едно число ще стане отрицателно (сбор на неотрицателни числа е неотрицателно число).

Източник: https://shkolkovo.online/st/o/12-hours-web-2-conspect__2lb0.pdf

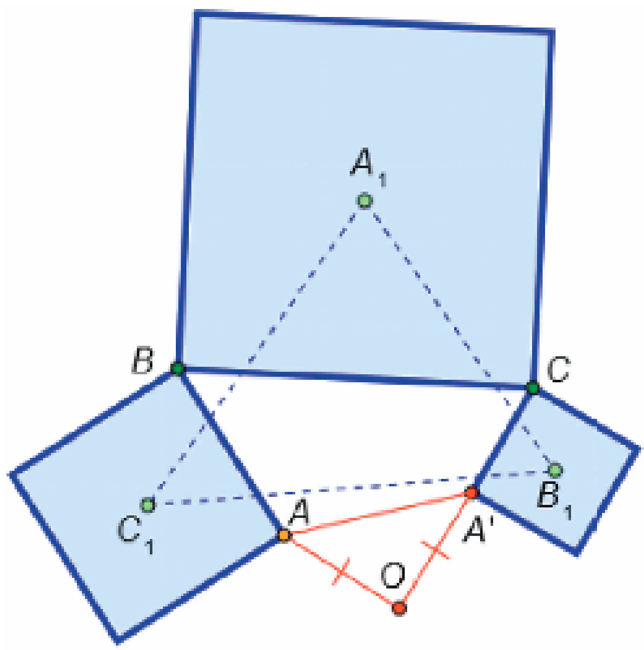
Задача 3 се решава стъпка по стъпка:



1) Първо разрязваме многоъгълника на квадрати 1×1 с помощта на прави, успоредни на координатните оси и отстоящи на целочислени разстояния от тях.
2) После всяко получено единично квадратче разрязваме на четири Т-образни фигури, както е показано тук. Това разрязване се намира лесно, ако в квадратчето най-напред построим мрежа 4×4.

Задача 4 се решава с принципа на крайния елемент. Да обходим редицата от първия до последния член. Всеки път преминаваме от текущото число или към негов делител, или към негово кратно. Ще се затрудним да подредим онези цели числа от 1 до 100 вкл., които имат малко делители и малко кратни. Най-малко делители притежават простите числа: те се делят само на единицата (а също и на себе си, но редицата не съдържа повторения). Най-малко кратни (нито едно освен себе си) имат числата над $100 : 2$, т.е. 51, 52, . . . , 100. Най-малък възможен брой съседи (един) имат простите числа, по-големи от 50: 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Те могат да имат за съсед в редицата само числото 1. Всяко число в редицата с изключение на първото и последното има два съседа. Следователно простите числа от 51 до 100 трябва да стоят в краищата на редицата. Съществуват десет такива числа (изброените по-горе), а редицата има само два крайни члена — първия и последния. Затова няма как да съставим такава редица: за поне осем от простите числа между 51 и 100 няма подходящо място в редицата.

Задача 5 се решава с метода на предположението. Избираме някоя точка, като предполагаме, че тя е върхът A на триъгълника ABC. Тогава върхът B се получава чрез завъртане на т. A около т. C_1 на ъгъл 90° срещу часовника, т. C е образ на т. B при завъртане около т. A_1 на ъгъл 90° срещу часовника. При завъртане на т. C около т. B_1 на ъгъл 90° срещу часовника получаваме т. A', която би трябвало да съвпадне с т. A, ако тя е била предположена правилно. Ако т. A' не съвпадне с т. A, то т. A е била избрана неправилно. В такъв случай нека т. O е правилното, но неизвестно място на върха A на триъгълника ABC. Точката O се подлага на същите три въртения, като при първите две от тях се получават правилните места на върховете B и C, а при третото завъртане т. O се връща в началното си местоположение. (Нейните образи не са показани, за да не се претрупва чертежът.)



Тъй като всяко въртене е еднаквост, то векторът $\overrightarrow{OA}$ запазва дължината си, само че се завърта три пъти на ъгъл 90°, тоест общо 270°, срещу часовника. Това е равносилно на едно завъртане на 90° по часовника. Казано с други думи, векторът $\overrightarrow{OA'}$ се получава от вектора $\overrightarrow{OA}$ чрез завъртане на 90° по часовника.

Ето защо OAA' се явява правоъгълен равнобедрен триъгълник ($OA' = OA$) с прав ъгъл при върха O. За т. O има два кандидата — по един във всяка полуравнина относно правата AA'. Обаче само единият кандидат удовлетворява изискването за посоката на завъртането, тоест т. O е определена еднозначно.

След като сме намерили т. O (действителното местоположение на върха A на триъгълника ABC), то истинските места на върховете B и C се намират чрез две завъртания на т. O на ъгъл 90° срещу часовника — първо около т. C_1, после около т. A_1. Така триъгълникът ABC е възстановен.

Задача 6. На всяко n-членно жури да съпоставим неговото допълнение, тоест журито, съставено от останалите $2n - n = n$ съдии. Това съответствие е инволюция, тъй като допълнението на допълнението е първоначалното жури. Тази инволюция не притежава неподвижни точки, защото произволно жури и допълнението му не могат да съвпадат (дори не могат да имат общи членове). Ето защо всички начини за избор на n-членно жури се разделят на двойки, следователно тези начини са четен брой.

Задача 7. Уравнението $a_n = 17a_{n-1} - 72a_{n-2}$ е линейно-рекурентно, затова се решава с помощта на характеристично уравнение:

$$x^n = 17x^{n-1} - 72x^{n-2}.$$

Тъй като търсим само ненулевите корени, делим на x^{n-2}. Прехвърляме всичко в лявата страна на уравнението:

$$x^2 - 17x + 72 = 0.$$

Характеристичните корени са $x_1 = 8$ и $x_2 = 9$. Следователно общото решение на рекурентното уравнение има вида

$$a_n = C_1 \,.\, 9^n + C_2 \,.\, 8^n,$$

където C_1 и C_2 са неопределени константи. След като заместим $n = 0$ и $n = 1$, с помощта на началните условия $a_0 = 10$ и $a_1 = 3$ получаваме системата

$$\left|\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 10 \\ 9C_1 + 8C_2 &= 3. \end{aligned}\right.$$

От нея намираме $C_1 = -77$ и $C_2 = 87$. Окончателно, $a_n = 87 \,.\, 8^n - 77 \,.\, 9^n$.

Задача 8. В уравнението $4f(10 - x) + 5f(x) = x$ заместваме x със $10 - x$ и получаваме система от две уравнения с две неизвестни:

$$\left|\begin{aligned} &4f(10-x) + 5f(x) = x \\ &4f(x) + 5f(10-x) = 10 - x. \end{aligned}\right.$$

За да изключим неизвестното $f(10 - x)$, умножаваме първото уравнение по 5, а второто — по 4, след което от първото уравнение вадим второто:

$$9f(x) = 9x - 40.$$

След деление на 9 намираме търсената функция:

$$f(x) = x - \frac{40}{9}\cdot$$

Проверката показва, че тя наистина е решение на функционалното уравнение:

$$4f(10-x) + 5f(x) = 4\left(10 - x - \frac{40}{9}\right) + 5\left(x - \frac{40}{9}\right) = 40 + x - 9\cdot\frac{40}{9} = 40 + x - 40 = x.$$